بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی

گروه آمار و ریاضی

گزارش طرح پژوهشی

عنوان:

نکاتی از همانی‌های تقریبی برخی از جبرهای باناخ

مجری:

محمد فزونی

بهمن ۱۳۹۶

شناسنامه طرح:

۱- عنوان طرح (به فارسی) : نکاتی از همانی‌های تقریبی برخی از جبرهای باناخ عنوان طرح (به انگلیسی): *Notes on approximate identities of some Banach algebras*
۲- مجری: دکتر محمد فزونی
۳- همکاران: -----
٤- ناظر: دکتر مهدی شاهینی
٥- تاریخ تصویب طرح در شورای پژوهشی: ۱۳۹٦/۰۸/۰۲
٦- تاریخ شروع: ۱۳۹٦/۰۸/۰۲ تاریخ خاتمه: ۱۳۹٦/۱۱/۰۲
۷- اعتبار: ٦۰۰۰۰۰۰ ریال
۸- محل تامین اعتبار: دانشگاه گنبد کاووس-گرنت پژوهشی
۹- شماره پرونده: ٦/٥۰٥

گواهی می‌شود گزارش نهایی طرح پژوهشی فوق در جلسه مورخ شورای پژوهشی دانشگاه مطرح و به تصویب رسید.

تقدیم به

ایران عزیزم

سرزمین نوابغ، اندیشمندان و هنرمندان

که در طول تاریخ همواره نقشی بزرگ در

شکوفایی تمدن بشریت ایفا کرده است

چکیده:

در این طرح پژوهشی، برای برخی از جبرهای باناخ که فضای سرشت‌های آن ناتهی است، به ارائه یک مفهوم جدید از همانی تقریبی می‌پردازیم. سپس به مطالعه این همانی تقریبی پرداخته و نتایج کارهای خود را با کارهای دیگران مقایسه خواهیم نمود. همچنین یک مفهوم جدید از کران‌داری را ارائه نموده و به مقایسه و مطالعه این مفهوم جدید با مفهوم کلاسیک کران‌داری می‌پردازیم. مثال‌های متنوع برای نشان دادن تمایزهای این مفاهیم با تعاریف از پیش تعریف شده، ارائه می‌گردد. در پایان به بررسی ارتباط بین وجود همانی‌های تقریبی با مقسوم علیه توپولوژیک صفر در جبرهای باناخ خواهیم پرداخت و چند سئوال خوب پژوهشی در این حوزه را ارائه خواهیم نمود.

کلمات کلیدی: جبر باناخ، فضای سرشت‌ها، همانی تقریبی، مقسوم علیه توپولوژیک صفر.

فهرست مطالب:

۱ فصل اول ۷

۱.۱ تعاریف مقدماتی ۷

۲ فصل دوم ۱۶

۲.۱ مقدمه ۱۶

۲.۲ تعاریف ۱۶

۲.۳ مثال‌ها ۱۸

۲.۴ برخی از ویژگی‌های موروثی: ۲۳

۳ فصل سوم ۲۷

۳.۱ مقدمه ۲۷

۳.۲ نتایج و سئوالات مطرح شده ۲۷

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی: ۲۹

نمایه: ۳۰

مراجع: ۳۱

فصل اول

تعاریف و مقدمات

اولیه

۱ فصل اول

۱.۱ تعاریف مقدماتی

در این فصل، تعاریف و مقدمات لازم برای خوانندهای که آشنایی لازم و کافی با برخی از مفاهیم آنالیز تابعی را ندارد، از منابع $[Dal00], [Lar71]$ ارائه می‌دهیم.

۱.۱.۱ تعریف:

فرض کنیم $(A, ||\cdot||)$ یک جبر نرم‌دار باشد. این جبر نرم‌دار را یک جبر باناخ[۱] می‌نامیم اگر کامل باشد و نرم A در نامساوی ذیل صدق کنید:

$$||ab|| \leq ||a||||b|| \qquad (a, b \in A).$$

جبر باناخ A را جابجایی می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم، $ab = ba$.

۱.۱.۲ تعریف:

فضای کاراکتری یا فضای سرشت‌های جبر باناخ A را با نماد $\Delta(A)$ نمایش می‌دهیم که برابر است با تمام نگاشت‌های ناصفر $\varphi: A \to \mathbb{C}$ به قسمی که φ خطی و ضربی است، یعنی

$$\varphi(\lambda a + b) = \lambda\varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad (a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}).$$

۱.۱.۳ تعریف

فرض کنیم A یک جبر باناخ و $a \in A$ عضوی دلخواه است. نگاشت $\hat{a}: \Delta(A) \to \mathbb{C}$ که به صورت $\hat{a}(f) = f(a)$ برای هر $f \in \Delta(A)$ تعریف می‌شود تبدیل گلفاند[۲] a می‌نامیم.

---

[۱] $Banach$
[۲] $Gelfand$

۱.۱.۴ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ است. قرار می‌دهیم

$$A^2 = \text{span}\{ab : a, b \in A\}.$$

جبر باناخ A را اساسی می‌نامیم هرگاه $\overline{A^2} = A$.

۱.۱.۵ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ است. فضای باناخ $(X, \|\cdot\|_X)$ را یک باناخ A–مدول چپ می‌نامیم هرگاه نگاشت دوخطی $(a, x) \to a \cdot x$ از $A \times X$ به X و ثابت $K > 0$ موجود باشد به قسمی که:

$$a \cdot (b \cdot x) = ab \cdot x, \quad \|a \cdot x\|_X \leq K\|a\|_A\|x\|_X \qquad (a, b \in A, x \in X).$$

به همین طریق باناخ A–مدول راست نیز تعریف می‌گردد.

۱.۱.۶ تعریف:

فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ است. فضای دوگان X، X^* را مجموعه تمام توابع خطی $f: X \to \mathbb{C}$ که در شرط زیر صدق می‌کنند تعریف می‌کنیم:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

اثبات می‌گردد که X^* با نرم فوق و اعمال نقطه‌وار، یک فضای باناخ است.

۱.۱.۷ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ است. تور $\{e_\alpha\}$ در A را یک همانی تقریبی کران‌دار می‌نامیم اگر $\{e_\alpha\}$ در A کران‌دار باشد و برای هر $a \in A$،

$$\lim_\alpha \|ae_\alpha - a\| = 0 \quad (a \in A).$$

با توجه به $[Dal00, Theorem\ 2.9.4]$، هر جبر باناخ A که دارای یک همانی تقریبی کران‌دار است، اساسی می‌باشد. قضیه اخیر به قضیه کوهن[۳]–هیوویت[۴]–الن[۵] و سینکلر[۶] مشهور است. همچنین با توجه به $[D\ddot{U}15, Theorem\ 2.2]$ اگر A دارای همانی تقریبی کران‌دار باشد، داریم

$$A = \{ab : a, b \in A\}.$$

۱.۱.۸ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$. مجموعه A_c را فضای تمام $a \in A$ در نظر می‌گیریم که $\varphi \notin \operatorname{supp} \hat{a}$ فشرده است. همچنین J_φ را فضای تمام $a \in A_c$ تعریف می‌کنیم که $\varphi \notin \operatorname{supp} \hat{a}$. از طرفی مجموعه M_φ را به شکل زیر معرفی می‌کنیم:

$$M_\varphi = \{a \in A : \varphi(a) = 0\}.$$

به وضوح با توجه به تعاریف فوق داریم، $J_\varphi \subseteq M_\varphi$. همچنین M_φ یک ایده‌ال بسته از A است و J_φ یک ایده‌ال از A می‌باشد که لزوما بسته نیست.

۱.۱.۹ تعریف:

فرض کنیم X یک فضای ناتهی موضعا فشرده و هاسدورف[۷] است. زیر جبر A از $C_0(X)$ را یک جبر تابعی می‌نامیم اگر نقاط X را به طور قوی جدا کند. یعنی برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، تابع $f \in A$ وجود داشته باشد که $f(x) \neq f(y)$ و برای هر $x \in X$، تابع $g \in A$ موجود باشد که $g(x) \neq 0$. یک جبر تابعی را یک جبر تابعی باناخ می‌نامیم اگر A دارای نرمی مانند $\|\cdot\|$ باشد که $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر باناخ است. جبر تابعی A را طبیعی می‌نامیم اگر $X = \Delta(A)$، یعنی هر سرشت از A یک تابعک برازش روی $x \in X$ است، یا نگاشت $x \to \varphi_x$ یک همسانریختی است که در آن $\varphi_x(f) = f(x)$.

۱.۱.۱۰ نمادگذاری:

در حالت جبرهای تابعی ایده‌ال M_{φ_x} را با نماد M_x نشان خواهیم داد.

---

[۳] Cohen
[۴] Hewitt
[۵] Allan
[۶] Sinclair
[۷] Hausdoroff

۱.۱.۱۱تعریف:

فرض کنیم X یک فضای ناتهی موضعا فشرده و هاسدورف است. یک جبر یکنواخت روی X، یک جبر تابعی $(A, \|\cdot\|)$ است که نرم $\|\cdot\|$ معادل است با نرم $\|\cdot\|_X$ از $C_0(X)$ که نرم $\|\cdot\|_X$ به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$\|f\|_X = \sup\{|f(x)| : \ x \in X\} \qquad \big(f \in C_0(X)\big).$$

۱.۱.۱۲تعریف:

فرض کنیم S یک مجموعه ناتهی است. مجموعه $c_{00}(S)$ را فضای تمام توابع روی S با محمل فشرده تعریف می‌کنیم. یک جبر دنباله‌ای باناخ روی S یک جبر تابعی A روی S است که $c_{00}(S) \subseteq A$.

۱.۱.۱۳تعریف:

تور $\{e_\alpha\}$ در A را یک همانی تقریبی کراندار ضعیف $(b.w.a.i.)$ می‌نامیم اگر ثابت $C > 0$ موجود باشد به قسمی که برای هر α، $\|e_\alpha\| < C$ و برای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$\lim_\alpha |\varphi(ae_\alpha) - \varphi(a)| = 0 \qquad \big(\varphi \in \Delta(A)\big),$$

و یا به طور معادل اگر $\lim_\alpha \varphi(e_\alpha) = 1$ برای هر $\varphi \in \Delta(A)$. اگر $\Delta(A) = \emptyset$ هر تور کراندار در A یک $b.w.a.i.$ است. بنابراین، برای اجتناب از موارد بدیهی همیشه فرض می‌کنیم که A یک جبر باناخ جابجایی است که $\Delta(A) \neq \emptyset$.

۱.۱.۱۴نکته:

در حالتی که A یک جبر تابعی باناخ طبیعی باشد، یک همانی تقریبی ضعیف کراندار در A را یک همانی تقریبی نقطه‌وار کراندار $(BPAI)$ می‌نامیم. این نام‌گذاری در $\big[D\ddot{U}15, Definition\ 2.11\big]$ استفاده شده است و چون ما در این طرح پژوهشی از این مقاله بسیار استفاده خواهیم نمود، از نمادگذاری‌ها و نام‌گذاری‌های این مقاله نیز استفاد ه خواهیم کرد.

۱.۱.۱۵ تعریف:

فرض کنیم که A یک جبر تابعی باناخ است. می‌گوئیم A دارای یک واحد تقریبی نسبی کران‌دار $(BRAUs)$ از کران m است اگر برای هر زیر مجموعه فشرده ناتهی K از $\Delta(A)$ و $\epsilon > 0$، تابع $f \in A$ موجود باشد که $\|f\| < m$ و $|1 - \varphi(f)| < \epsilon$ برای هر $\varphi \in K$.

۱.۱.۱۶ تعریف:

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. قرار می‌دهیم:

$$L^1(G) = \left\{ f: G \to \mathbb{C} : \int_G |f(x)|\, dx < \infty \right\}$$

برای هر $f, g \in L^1(G)$ ضرب پیچش را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$f * g(x) := \int_G f(y) g(y^{-1}x) dy = \int_G f(xy) g(y^{-1}) dy.$$

با ضرب فوق و اعمال نقطه‌وار و نرم $\|f\|_1 = \int_G |f(x)|\, dx$ تبدیل به یک جبر باناخ می‌گردد که آن را جبر گروهی می‌نامیم.

۱.۱.۱۷ تعریف:

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. زیر فضای $S(G)$ از $L^1(G)$ را یک جبر سگال[۸] می‌نامیم اگر دارای شرایط زیر باشد:

۱. $S(G)$ در $L^1(G)$ چگال باشد.

۲. $S(G)$ تحت یک نرم $\|\cdot\|_{S(G)}$ یک فضای باناخ باشد و $\|f\|_1 \leq \|f\|_{S(G)}$ برای هر $f \in S(G)$.

۳. برای هر $f \in S(G)$، $L_y f$ در $S(G)$ قرار داشته باشد و $\|f\|_{S(G)} = \|L_y f\|_{S(G)}$.

٤. برای هر $f \in S(G)$، نگاشت $y \to L_y f$ پیوسته باشد.

[۸] $Segal$

۱.۱.۱۸ تعریف:

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است.گروه G را میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر $m \in L^\infty(G)^*$ موجود باشد به قسمی که $m \geq 0$، $m(1) = 1$ و $m(L_x f) = m(f)$ برای هر $x \in G$ و $f \in L^\infty(G)$ که $L_x f(y) := f(x^{-1}y)$ برای هر $y \in G$.

۱.۱.۱۹ تعریف:

برای هر $1 < p < \infty$ فرض کنیم:

$$A_p(G) = \left\{ u \in C_0(G) : u = \sum_{i=1}^{\infty} f_i * \tilde{g}_i , f_i \in L^p(G), g_i \in L^q(G), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_p \|g_i\|_q < \infty \right\}$$

که در آن برای هر $x \in G$، $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$. مجموعه $A_p(G)$ به همراه ضرب نقطه‌وار، اعمال وراثتی فضای برداری که از $C_0(G)$ به ارث می‌برد و نرم زیر

$$\|u\|_{A_p(G)} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_p \|g_i\|_q : \ u = \sum_{i=1}^{\infty} f_i * \tilde{g}_i \right\}$$

جبر فیگا تالامانکا[۹]–هرتس[۱۰] می‌نامیم. اگر $p = 2$، آنگاه $A(G) = A_2(G)$ را جبر فوریه[۱۱] گروه G می‌نامیم. با توجه به $[Der11, Theorem\ 2]$، اگر G یک گروه آبلی باشد، آنگاه $A(G)$ به طور یک‌ریخت طول‌پای برابر است با $L^1(\hat{G})$ که در آن $\hat{G}$ نشان دهنده دوگان گروه G است. همچنین با توجه به $[Her73]$، برای هر $1 < p < \infty$ داریم، $A_p(G)$ یک جبر تابعی باناخ طبیعی است.

۱.۱.۲۰ قضیه (لپتین[۱۲]–هرتس):

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است و $1 < p < \infty$. در این صورت $A_p(G)$ دارای یک $b.a.i.$ است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد.

برهان: مراجعه کنید به $[Pie84, Theorem\ 10.4]$. ■

---

[۹] *Figa Talamanca*
[۱۰] *Herz*
[۱۱] *Fourier algebra*
[۱۲] *Leptin*

۱.۱.۲۱تعریف:

فرض کنیم X,Y دو فضای توپولوژیک و $C(X,Y)$ نشان دهنده تمام نگاشت‌های پیوشته از X به Y باشد. فرض کنیم $K \subseteq X$ فشرده و $U \subseteq Y$ باز باشد. همچنین فرض کنیم

$$V(K,U) = \{f \in C(X,Y) : f(K) \subseteq U\}.$$

گردایه تمامی $V(K,U)$ تشکیل یک زیرپایه برای یک توپولوژی می‌دهد که به آن توپولوژی فشرده–باز روی $C(X,Y)$ می‌گوئیم. به عنوان مثال یک همسایگی از $f_0 \in C(X,\mathbb{C})$ در این فضا برابر است با (توجه کنید که $Y = \mathbb{C}$ را انتخاب نموده‌ایم):

$$N(f_0,\epsilon,K) = \{f \in C(X,Y) : |f(x) - f_0(x)| < \epsilon \ \forall x \in K\}$$

که K یک زیر مجموعه فشرده از X است و $\epsilon > 0$. در نتیجه تور $\{f_\alpha\}$ از $C(X,Y)$ به f_0 میل می‌کند اگر و تنها اگر برای هر زیر مجموعه فشرده K از X، $\|f_\alpha - f\|_K \to 0$.

۱.۱.۲۲تعریف:

فرض کنیم A یک فضای برداری توپولوژیک با توپولوژی τ باشد. اگر A یک جبر باشد که عمل ضرب (حلقه) پیوسته است، آنگاه می‌گوئیم که A یک جبر توپولوژیک می‌باشد که اغلب آن را با نماد $A[\tau]$ نشان خواهیم داد.

۱.۱.۲۳تعریف:

فرض کنیم $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ قرص باز باشد. جبر دیسکی برابر است با

$$A(\overline{\mathbb{D}}) = \Big\{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) : \ f \text{ روی } \mathbb{D} \text{ تحلیلی است } \Big\}.$$

۱.۱.۲۴قضیه (خودتوانی شیلو[۱۳]):

فرض کنیم A یک جبر باناخ و C یک زیر مجموعه فشرده باز (یعنی هم باز و هم فشرده) از $\Delta(A)$ باشد. آنگاه عضو خودتوان $a \in A$ وجود دارد به قسمی که $\hat{a} = \chi_C$.

برهان: مراجعه کنید به $[Kan09, Theorem\ 3.5.1]$. ■

[۱۳] *Šilov idempotent theorem*

۱.۱.۲۵ تعریف:

فرض کنیم $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر باناخ است. عضو y از A را یک مقسوم علیه توپولوژیک صفر (TDZ) می‌نامیم اگر دنباله $\{x_n\} \subseteq A$ وجود داشته باشد به قسمی که $\|x_n\| = 1$ برای هر n و $x_n y \to 0$ یا $yx_n \to 0$. بعلاوه اگر $yx_n \to 0$ می‌گوئیم که y یک مقسوم‌علیه توپولوژیک صفر چپ است و به طور مشابه اگر $x_n y \to 0$ می‌گوئیم که y یک مقسوم علیه توپولوژیک صفر راست است. اگر y یک TDZ راست و چپ باشد، آنرا یک مقسوم علیه توپولوژیک صفر دوطرفه می‌نامیم. گردایه تمام مقسوم علیه‌های توپولوژیک صفر A را با نماد $Z(A)$ نشان خواهیم داد.

قضیه بعدی که در مقاله $[BD95, Theorem\ 1]$ اثبات شده است جبرهای باناخی را توصیف می‌کند که تمام اعضای آنها مقسوم‌علیه توپولوژیک صفر هستند.

۱.۱.۲۶ قضیه:

هر عضو از جبر باناخ مختلط A یک TDZ است اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱. A نامتناهی بعد است و دارای یک پایه متعامد باشد.
۲. A یک جبر باناخ یکنواخت بدون همانی است که مرز شیلو $\partial(A)$ با $\Delta(A)$ منطبق است.
۳. A یک $*$–جبر باناخ هرمیتی بدون همانی با برگشت پیوسته است.

سایر تعریفات و ملزومات مورد استفاده در این طرح پژوهشی را، در فصل‌های بعدی در هنگام نیاز تعریف خواهیم نمود.

فصل دوم

نتایج اصلی

۲ فصل دوم

۲.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا به تعریف مفاهیم اصلی پرداخته، سپس مثال‌هایی متنوع برای نشان دادن تمایز تعاریف طرح پژوهشی حاضر با مفاهیم کلاسیک و قدیمی‌تر ارائه می‌دهیم. در پایان نیز قصد داریم به بررسی چند مورد از ویژگی‌های مورثی بپردازیم. به طور کلی بحث همانی‌های تقریبی (کران‌دار) در آنالیز تابعی چون از جایگاه ویژه و مهمی برخوردار است، تعمیم‌های خوب از این مفهوم بسیار با اهمیت می‌باشد.

در سراسر این فصل همواره فرض می‌کنیم که A یک جبر باناخ است و $\Delta(A) \neq \emptyset$ مگر اینکه به روشنی ذکر نمائیم که A شرایطی به غیر از این دارد.

۲.۲ تعاریف

فرض کنیم $\mathbf{K}\big(\Delta(A)\big)$ نشان دهنده گردایه تمام زیرمجموعه‌های فشرده از $\Delta(A)$ است و τ_{co} نشان دهنده توپولوژی فشرده–باز از فضای $C_0\big(\Delta(A)\big)$ باشد.

۲.۲.۱ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ است. یک همانی تقریبی سی. دبلیو $(c.w.a.i.)$ برای A (سی. دبلیو از $compact\ weak$ اقتباس شده است) تور $\{e_\alpha\}$ در A است به قسمی که برای هر $a \in A$ و $K \in \mathbf{K}\big(\Delta(A)\big)$،

$$\lim_\alpha \|\widehat{ae_\alpha} - \hat{a}\|_K = \lim_\alpha \left(\sup_{\varphi \in K} |\varphi(ae_\alpha) - \varphi(a)| \right) = 0.$$

اگر تور $\{e_\alpha\}$ کران‌دار باشد، می‌گوئیم تور مذکور یک همانی تقریبی سی. دبلیو کران‌دار برای جبر باناخ A است $(b.c.w.a.i.)$.

۲.۲.۲ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. می‌گوئیم A دارای یک واحد تقریبی سی. دبلیو $(c.w.a.u.)$ است اگر برای هر $a \in A$، $K \in \mathbf{K}(\Delta(A))$ و $\epsilon > 0$، $e \in A$ وجود داشته باشد به قسمی که $\|\widehat{ae} - \hat{a}\|_K < \epsilon$. می‌گوئیم واحد تقریبی دارای کران $m > 0$ است اگر e را بتوان به قسمی انتخاب کرد که $\|e\| < m$. در این شرایط می‌گوئیم که A دارای یک واحد تقریبی سی. دبلیو کران‌دار $(b.c.w.a.u.)$ است.

به وضوح بررسی می‌گردد که اگر A دارای یک $b.c.w.a.i.$ باشد، دارای یک $b.c.w.a.u$ نیز هست.

در ادامه قصد داریم به معرفی یک مفهوم جدید از کران‌داری در جبر A بپردازیم.

۲.۲.۳ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ است. تور $\{e_\alpha\}$ در A را یک همانی تقریبی سی. دبلیو کران‌دار ضعیف $(w.b.c.w.a.i.)$ می‌نامیم اگر تور $\{\widehat{e_\alpha}\}$ یک همانی تقریبی کران‌دار برای جبر توپولوژیکی $\hat{A}[\tau_{co}]$ باشد، یعنی برای هر $a \in A$ و $K \in \mathbf{K}(\Delta(A))$ داریم، $\lim_\alpha \|\widehat{ae_\alpha} - \hat{a}\|_K = 0$ و ثابت $M > 0$ وجود دارد به قسمی که برای هر α و $K \in \mathbf{K}(\Delta(A))$،

$$P_K(\widehat{e_\alpha}) = \sup\{|\varphi(e_\alpha)| : \varphi \in K\} = \|\widehat{e_\alpha}\|_K < M.$$

چون هر $\widehat{e_\alpha}$ در فضای $C_0(\Delta(A))$ قرار دارد، رابطه فوق معادل است با $\|\widehat{e_\alpha}\|_{\Delta(A)} < M$.

۲.۲.۴ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ است. می‌گوئیم A دارای یک واحد تقریبی سی. دبلیو کران‌دار ضعیف $(w.b.c.w.a.u.)$ از کران m است اگر برای هر $a \in A$، $K \in \mathbf{K}(\Delta(A))$ و $\epsilon > 0$، $e \in A$ موجود باشد که $\|\hat{e}\|_{\Delta(A)} < m$ و $\|\widehat{ae} - \hat{a}\|_K < \epsilon$.

۲.۲.۵ نکته:

به وضوح می‌توان بررسی کرد که هر $b.c.w.a.i.$ یک $w.b.c.w.a.i.$ است. در فصل بعد نشان خواهیم داد که این دو مفهوم با یکدیگر معادل یا برابر نیستند.

۲.۲.۶ نکته:

برای جبر یکنواخت طبیعی A روی X می‌توان بررسی نمود که دو مفهوم $w.b.c.w.a.i.$ و $b.c.w.a.i.$ با یکدیگر معادل هستند. چون A یک جبر یکنواخت طبیعی است پس $\Delta(A) = X$. در نتیجه برای هر $f \in A$ داریم، $\|\hat{f}\|_{\Delta(A)=X} = \|f\|_A$. در نتیجه دو مفهوم مذکور برابر هستند.

۲.۲.۷ نکته:

می‌توانیم صورت‌های قوی‌تر و مجردتری از تعریف ۲.۲.۳ به صورت زیر ارائه داد:

فرض کنیم τ یک توپولوژی روی $C_0(\Delta(A))$ تولید شده توسط خانواده اشباع‌شده $\{p_i\}$ از نیم‌نرم‌های روی $\Delta(A)$ باشد. تور $\{a_\lambda\}$ در A را یک $w.b.c.w.a.i.$ برای A می‌نامیم اگر $\{\widehat{a_\lambda}\}$ یک همانی تقریبی کران‌دار برای جبر توپولوژیکی $\hat{A}[\tau]$ باشد، یعنی برای هر $a \in A$، $\widehat{a_\lambda}a \xrightarrow{\tau} \hat{a}$ و $M > 0$ موجود باشد به قسمی که برای هر λ, i داشته باشیم، $p_i(\widehat{a_\lambda}) < M$. اما در این طرح پژوهشی تنها حالت $\tau = \tau_{co}$ را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۲.۳ مثال‌ها

در این بخش به ارائه مثال‌هایی متنوع جهت نشان دادن تمایز تعاریف ارائه شده در این طرح پژوهشی با مفاهیم از پیش تعریف شده می‌پردازیم.

۲.۳.۱ مثال:

فرض کنیم $1 < p < \infty$، و G یک گروه موضعا فشرده باشد که میانگین‌پذیر نیست. با توجه به $[D\ddot{U}15, Proposition\ 3.11]$ نتیجه می‌شود که $A_p(G)$ دارای $b.c.w.a.i.$ نمی‌باشد. در ادامه نشان خواهیم داد که $A_p(G)$ دارای یک $w.b.c.w.a.i.$ است.

فرض کنیم K فشرده است $\Lambda = \{K \subseteq G : |K| > 0,$ به وضوح Λ با رابطه شمول یک مجموعه جهت‌دار است. برای هر $K \in \Lambda$، تابع u_K را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_K := |K|^{-1}\chi_{KK} * \widetilde{\chi_K}.$$

توجه می‌کنیم که $\check{f}(x) = f(x^{-1})$. به وضوح $\{u_K\}$ توری است در $A_p(G)$. برای هر $x \in G$ داریم:

$$u_K(x) = |K|^{-1} \int_G \chi_{KK}(y)\widetilde{\chi_K}(y^{-1}x)\, dy = |K|^{-1} \int_{KK} \widetilde{\chi_K}(y^{-1}x)\, dy$$

$$= |K|^{-1} \int_{KK} \chi_{xK}(y)\, dy = \frac{|KK \cap xK|}{|K|}.$$

اگر $x \in K$، داریم، $KK \cap xK = xK$. بنابراین $u_K(x) = 1$ و در غیر این صورت چون $KK \cap xK \subseteq xK$، داریم، $0 \leq u_K(x) \leq 1$. از این رو تور $\{\widehat{u_K}\}$ در $C_0(G)$ کران‌دار است. حال فرض کنیم f یک عضو دلخواه از $A_p(G)$ و K' یک زیر مجموعه فشرده از G باشد. چون G موضعا فشرده است، برای هر $x \in K'$، یک همسایگی فشرده V_x از x موجود است. از سوی دیگر می‌دانیم که $K' \subseteq \bigcup_{x\in K'} V_x$ و برای هر x، $|V_x| > 0$. اما K' فشرده است، پس نقاط $x_1, \dots, x_n \in K'$ وجود دارند به قسمی که $K' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_x$. بنابراین اگر قرار دهیم، $K'' = \bigcup_{i=1}^{n} V_x$ نتیجه خواهیم گرفت $K'' \in \Lambda$ و $K' \subseteq K''$. حال واضح است که $\lim_{K\in\Lambda} \left\|\widehat{u_K} f - \hat{f}\right\| = 0$ و این برهان را کامل می‌کند. ■

قبل از پرداختن به مثال بعدی، ابتدا به تعریف یک جبر باناخ می‌پردازیم. فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده، $A(G)$ جبر فوریه و $L^1(G)$ جبر گروهی باشد. قرار می‌دهیم، $\mathcal{L}A(G) = L^1(G) \cap A(G)$ و نرم زیر روی این فضا را در نظر می‌گیریم:

$$|||f||| = \|f\|_1 + \|f\|_{A(G)} \qquad \big(f \in \mathcal{L}A(G)\big).$$

با توجه به $[GL02]$ داریم، $\mathcal{L}A(G)$ با ضرب نقطه‌وار و نرم فوق، یک جبر باناخ جابجایی است که آن را جبر لبگ[۱۴]- فوریه می‌نامیم و همچنین داریم، $\Delta\big(\mathcal{L}A(G)\big) = G$. ثابت شده است که $\mathcal{L}A(G)$ دارای یک $b.a.i.$ است اگر و تنها اگر G فشرده باشد $[GH02, Proposition\ 2.6]$.

مثال بعدی نشان دهنده یک جبر باناخ است که دارای یک $w.b.c.w.a.i.$ است اما $b.a.i.$ ندارد.

[۱۴] *Lebesgue*

۲.۳.۲ مثال:

فرض کنیم $G = \mathbb{R}$ گروه جمعی اعداد حقیقی باشد و $A = \mathcal{L}A(G)$. به وضوح G فشرده نیست، در نتیجه با توجه به بحث فوق، A دارای $b.a.i.$ نیست. از سوی دیگر، با توجه به قضیه لپتین–هرتس (قضیه ۱.۱.۲۰) و استفاده از این واقعیت که هر گروه فشرده میانگین‌پذیر است، نتیجه می‌گیریم که A دارای یک $b.a.i.$ در $A(G) \cap C_c(G)$ است که آن را با $\{u_\alpha\}$ نشان می‌دهیم. همچنین می‌دانیم که برای هر $u \in A(G)$ داریم، $\|u\|_G \leq \|u\|_{A(G)}$. بنابراین، برای هر $u \in A$ و $K \in \mathbf{K}(G)$ (یعنی K یک زیر مجموعه فشرده از G است) داریم:

$$\sup_{x\in K}|u(x)u_\alpha(x) - u(x)| \leq \sup_{x\in G}|u(x)u_\alpha(x) - u(x)| \leq \|uu_\alpha - u\|_{A(G)} \to 0.$$

در نتیجه، $\{u_\alpha\}$ یک $w.b.c.w.a.i.$ برای A است. ■

۲.۳.۳ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر تابعی روی X باشد. می‌گوئیم $x \in X$ یک نقطه قله‌ای است اگر $f \in A$ موجود باشد به قسمی که $f(x) = 1$ و $|f(y)| < 1$ برای هر $y \in X \setminus \{x\}$. با توجه به $[Dal00, Example\ 2.1.13(ii)]$، برای جبر دیسکی $A(\overline{\mathbb{D}})$، نقطه $z \in \overline{\mathbb{D}}$ یک نقطه قله‌ای است اگر و تنها اگر $z \in \mathbb{T}$ که $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$، $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ و $\overline{\mathbb{D}}$ بستار $\mathbb{D}$ می‌باشد.

مثال بعدی نشان می‌دهد که جبرهای باناخی وجود دارند که دارای $w.b.c.w.a.i.$ نمی‌باشند.

۲.۳.۴ مثال:

فرض کنیم $A = A(\overline{\mathbb{D}})$ جبر دیسکی باشد و $z_0 \in \mathbb{D}$. فرض کنیم $B = M_{z_0}$. به وضوح، $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{z_0\} \subseteq \Delta(B)$. بنابراین اگر B دارای یک $w.b.c.w.a.i.$ باشد، آنگاه B دارای یک $BPAI$ می‌باشد که با $\left[D\ddot{U}15, Example\ 4.8(i)\right]$ در تناقض است. پس B دارای $w.b.c.w.a.i.$ نیست. ■

۲.۳.۵ نکته:

اگر جبر تابعی A دارای یک $b.c.w.a.i.$ باشد، آنگاه A دارای یک $BRAUs$ است.

مثال بعدی نشان می‌دهد که جبرهای باناخی وجود دارند که دارای $BPAI$ هستند ولی دارای هیچ $BRAUs$ نیستند. بنابراین دو مفهوم $BPAI$ و $b.c.w.a.i.$ با یکدیگر متمایز هستند.

۲.۳.۶ مثال:

فرض کنیم $\mathbb{I} = [0,1]$ و قرار دهید $A = \{f \in C(\mathbb{I}) : I(f) < \infty\}$ که

$$I(f) = \int_0^1 \frac{|f(t) - f(0)|}{t} dt.$$

برای هر $f \in A$ تعریف می‌کنیم $\|f\| = \|f\|_{\mathbb{I}} + I(f)$. با توجه به $[D\ddot{U}15, Example\ 5.1]$، $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر تابعی باناخ طبیعی است. همچنین، M_0 دارای هیچ $BRAUs$ نمی‌باشد. اما دارای یک $BPAI$ است. بنابراین M_0 دارای هیچ $b.c.w.a.i.$ نیست. ■

مثال بعدی نشان می‌دهد که دو مفهوم $b.a.i.$ و $b.c.w.a.i.$ با یکدیگر متفاوت هستند.

۲.۳.۷ مثال:

فرض کنیم $\alpha = (\alpha_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (یعنی α یک دنباله در $\mathbb{C}$ است) و برای هر $b \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم:

$$p_n(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k|\alpha_{k+1} - \alpha_k|, \quad p(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_n(\alpha).$$

قرار می‌دهیم $A = \{\alpha \in c_0 : p(\alpha) < \infty\}$. با توجه به $[Dal00, Example\ 4.1.46]$، A با نرم $\|\alpha\| = \|\alpha\|_{\mathbb{N}} + p(\alpha)$، یک جبر دنباله‌ای باناخ طبیعی روی $\mathbb{N}$ است. برای هر $K \in \mathbf{K}(\mathbb{N})$، تابع $\alpha_K \in A$ وجود دارد که $\alpha_K(k) = 1$ برای هر $k \in K$ و $\|\alpha_K\| \leq 4$. بنابراین

$\{\alpha_K : K \in \mathbf{K}(\mathbb{N})\}$ یک $b.c.w.a.i.$ برای A است. اما با توجه به بندهای (iii) و (v) از $[Dal00, Example\ 4.1.46]$، A^2 دارای هم- بعد نامتناهی در A است که

$$A^2 = \text{linear span}\{ab : a, b \in A\}.$$

بنابراین A دارای $b.a.i.$ نیست. دقت کنید که هم بعد A^2 در A در واقع بعد فضای $\frac{A}{A^2}$ است. ■

۲.۳.۸ نکته:

با توجه به قضیه کوهن، می‌دانیم که اگر جبر باناخ A دارای یک $b.a.i.$ باشد آنگاه A تجزیه می‌شود، یعنی برای هر $a \in A$، $b, c \in A$ وجود دارند که $a = bc$. سئوال ذیل در مورد $b.c.w.a.i.$ و مطرح می‌گردد:

آیا قضیه کوهن با جایگزینی $b.a.i.$ با $b.c.w.a.i.$ برقرار می‌باشد؟

باید توجه کرد که مثال ۲.۳.۷ جواب منفی به سئوال مطرح شده می‌دهد. در واقع اگر A تجزیه شود، آنگاه $A^2 = A$ که یک تناقض است با نامتناهی بودن هم- بعد A^2 در A.

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است و $A = S(G)$ یک جبر سگال در $L^1(G)$ می‌باشد. با استفاده از قضیه کوهن داریم اگر A دارای یک $b.a.i.$ باشد آنگاه $A = L^1(G)$. در ادامه با کمک قضیه خودتوانی شیلو (قضیه ۱.۱.۲٤) نشان می‌دهیم که یک جبر سگال $S(G)$ وجود دارد به قسمی که دارای یک $w.b.c.w.a.i.$ می‌باشد ولی $S(G) \neq L^1(G)$. ابتدا نیاز به یک گزاره داریم که ابتدا آن را بیان و اثبات می‌کنیم.

۲.۳.۹ گزاره:

هر جبر باناخ جابجایی A با فضای سرشت‌های گسسته، دارای یک $w.b.c.w.a.i.$ می‌باشد اما عکس این گزاره در حالت کلی برقرار نیست.

برهان: فرض کنیم $\mathcal{F}(\Delta(A))$ گردایه تمام زیرمجموعه‌های متناهی از $\Delta(A)$ باشد و $K \in \mathcal{F}(\Delta(A))$. بنابراین با توجه به قضیه خودتوانی شیلو (قضیه ۱.۱.۲٤)، عضو e_K از A بدست می‌آید به قسمی که $\widehat{e_K} = \chi_K$. پس برای هر $K \in \mathcal{F}(\Delta(A))$، $\|\widehat{e_K}\|_{\Delta(A)} = 1$. حال به وضوح بررسی می‌گردد که مجموعه $\{e_K : K \in \mathcal{F}(\Delta(A))\}$ یک $w.b.c.w.a.i.$ برای A است که $\{K : K \in \mathcal{F}(\Delta(A))\}$ به وسیله رابطه شمول یک مجموعه جهت‌دار است. چون برای هر $a \in A$ و $K' \in \mathcal{F}(\Delta(A))$ داریم:

$$\lim_K \|\widehat{e_K a} - \hat{a}\|_{K'} = 0.$$

برای مشاهده اینکه عکس گزاره در حالت کلی برقرار نیست، جبر $A_p(G)$ را در نظر بگیرید که $G = SL(2, \mathbb{R})$ برابر است با گروه ضربی تمام ماتریس‌های 2×2 حقیقی با دترمینان 1. می‌دانیم که G

میانگین‌پذیر نیست، برای دیدن این واقعیت به $[Run02, Exercise\ 1.2.6(viii)]$ مراجعه نمائید. همچنین با توجه به $[Sug90, Proposition\ 1.4, pp. 207]$ می‌دانیم که G یک گروه همبند است و این یعنی G نمی‌تواند یک گروه گسسته باشد. با توجه به مثال ۲.۳.۱، $A_p(G)$ دارای یک $w.b.c.w.a.i.$ است اما $\Delta\left(A_p(G)\right) = G$ گسسته نمی‌باشد. ■

۲.۳.۱۰ مثال:

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده آبلی با گروه دوگان $\hat{G}$ باشد. برای هر $1 < p \leq \infty$ قرار می‌دهیم: $S_p(G) = L^1(G) \cap L^p(G)$ و نرم زیر را روی این فضا تعریف می‌نمائیم:

$$\|f\|_{S_p(G)} = \max\{\|f\|_1, \|f\|_p\} \qquad \left(f \in S_p(G)\right).$$

بررسی می‌گردد که $S_p(G)$ یک جبر سگال است. اگر G فشرده و نامتناهی باشد، آنگاه با توجه به $[IT00, Remark\ 2]$، $S_p(G)$ دارای $b.w.a.i.$ نیست. فرض کنیم $A = S_p(G)$. می‌دانیم که $\Delta(A)$ همسانریخت است با G، به عنوان مثال به منبع $[Rei71]$ مراجعه کنید. چون G فشرده است با توجه به قضایای معروف در آنالیز هارمونیک نتیجه می‌گیریم که $\hat{G}$ گسسته است. بنابراین با استفاده از گزاره ۲.۳.۹ نتیجه می‌گیریم که A دارای یک $w.b.c.w.a.i.$ است. ■

۲.۴ برخی از ویژگی‌های موروثی:

در این بخش برای برخی از ایده‌ال‌های بسته I از جبر باناخ A با استفاده از برخی شرایط، نشان خواهیم داد که I دارای یک $b.c.w.a.i.$ است اگر و تنها اگر A دارای یک $b.c.w.a.i.$ باشد. نتایجی مشابه در مورد $w.b.c.w.a.i.$ نیز بدست می‌آید. ابتدا به بیان و اثبات نتیجه ذیل می‌پردازیم که رابطه بین $b.c.w.a.u.$ و $b.c.w.a.i.$ را نشان می‌دهد و یک ابزار اساسی در ادامه خواهد بود.

۲.۴.۱ گزاره:

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابجایی است. آنگاه A دارای یک $b.c.w.a.u.\ (w.b.c.w.a.u.)$ است اگر وتنها اگر A دارای یک $b.c.w.a.i.\ (w.b.c.w.a.i.)$ باشد.

برهان: فرض کنیم که A دارای یک $b.c.w.a.u.$ از کران $M > 0$ است. همچنین فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک زیر مجموعه متناهی از A، $K \in \mathbf{K}(\Delta(A))$ و $\epsilon > 0$ مفروض باشد. آنگاه با توجه به $[Kan09, Proposition\ 1.1.11]$، عضو $e_{(\mathcal{F},K,\epsilon)}$ از A وجود دارد به قسمی که

$$\|e_{(\mathcal{F},K,\epsilon)}\| < M, \qquad \|\widehat{e_{(\mathcal{F},K,\epsilon)}}\hat{a} - \hat{a}\| < \epsilon \quad (a \in \mathcal{F}).$$

حال تور زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{U} = \left\{e_{\left(\mathcal{F},K,\frac{1}{n}\right)} : K \in \mathbf{K}(\Delta(A)), \mathcal{F} \subseteq A \text{ متناهی}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

براحتی می‌توان بررسی نمود که تور $\mathcal{U}$ یک $b.c.w.a.i.$ برای A است.

فرض کنیم I یک ایده‌ال بسته از A باشد. همچنین فرض کنیم $I, \frac{A}{I}$، که $\frac{A}{I}$ همان جبر خارج قسمت است، دارای $b.a.i.$ از کران m, n باشند. آنگاه A دارای یک $b.a.i.$ از کران $m + n + mn$ است، برای دیدن اثباتی از این گزاره به $[Kan09, Lemma\ 1.4.8(ii)]$ مراجعه نمائید. در حالت $b.c.w.a.i.$ حالت زیر از گزاره فوق را داریم. ■

۲.۴.۲ لم:

فرض کنیم I دارای یک $(w.b.c.w.a.i.(b.c.w.a.i.)$ از کران m و $\frac{A}{I}$ دارای یک $b.a.i.$ از کران n است. در این صورت A دارای یک $(w.b.c.w.a.i.(b.c.w.a.i.)$ از کران $m + n + mn$ است.

برهان: با یک اصلاحات جزئی در برهان $[Kan09, Lemma\ 1.4.8\ (ii)]$ اثبات بدست می‌آید. بنابراین از نوشتن برهان به طور کامل خودداری می‌نمائیم. ■

جبر تابعی باناخ A وجود دارد که A دارای یک $b.c.w.a.i.$ است اما یکی از ایده‌ال‌های بسته A دارای هیچ $b.c.w.a.i.$ نمی‌باشد، مراجعه کنید به $[LF15, Example\ 5.6]$. در واقع $A = C^1[0,1]$: جبر تمام توابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته، دارای یک $b.c.w.a.i.$ است اما برای هر $t_0 \in [0,1]$، M_{t_0} دارای هیچ $BPAI$ نیست و از این رو دارای $b.c.w.a.i.$ نمی‌باشد. بنابراین عکس لم ۲.٤.۲ در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. هر چند که قضیه زیر را داریم.

۲.۴.۳ قضیه:

فرض کنیم A یک جبر باناخ، $\phi_0 \in \Delta(A)$ و $\overline{J_{\phi_0}} = M_{\phi_0}$. فرض کنیم $n > 0$ وجود دارد به قسمی که برای هر همسایگی U از ϕ_0، $a \in A$ وجود داشته باشد به طوری که $\phi_0(a) = 1, \|a\| \leq n$ و $supp\ \hat{a} \subseteq U$. آنگاه M_{ϕ_0} دارای یک $(b.c.w.a.i.)$ $w.b.c.w.a.i.$ است اگر و تنها اگر A دارای یک $(b.c.w.a.i.)$ $w.b.c.w.a.i.$ باشد.

برهان: اثبات را تنها برای حالت $w.b.c.w.a.i.$ ارائه می‌دهیم چون در حالت دوم اثبات مشابه است.

فرض کنیم M_{ϕ_0} دارای یک $w.b.c.w.a.i.$ است. به وضوح M_{ϕ_0} از هم بعد 1 است، یعنی فضای $\frac{A}{M_{\phi_0}}$ توسط یک بردار تولید می‌گردد. در نتیجه $\frac{A}{M_{\phi_0}}$ دارای یک $b.a.i.$ است و از این رو A طبق لم ۲.٤.۲، دارای یک $w.b.c.w.a.i.$ می‌باشد.

برعکس، فرض کنیم A دارای یک $w.b.c.w.a.i.$ است. همچنین فرض کنیم $a \in M_{\phi_0}, \epsilon > 0$. چون $\overline{J_{\phi_0}} = M_{\phi_0}$، $a_1 \in J_{\phi_0}$ وجود دارد به قسمی که $\|a_1 - a\| < \epsilon$. بنابراین برای هر $W \in \mathbf{K}(\Delta(A))$، $m > 0$ و $b \in A$ وجود دارد به طوری که

$$\|\widehat{a_1} - \widehat{a_1 b}\|_W < \epsilon, \ \ \|\hat{b}\|_{\Delta(A)} \leq m.$$

همسایگی U از ϕ_0 در $\Delta(A)$ وجود دارد به قسمی که $U \cap supp\ \widehat{a_1} = \emptyset$، چون $a_1 \in J_{\phi_0}$ و $\Delta(A)$ هاسدورف است. حال با استفاده از فرض $c \in A$ وجود دارد که $\|c\| \leq n, \phi_0(c) = 1$ و $supp\ \hat{c} \subseteq U$. پس $\widehat{a_1}\hat{c} = 0$، $b - bc$ در M_{ϕ_0} قرار دارد و $\|\widehat{b - bc}\|_{\Delta(A)} \leq m(n+1)$. بنابراین برای $W \in \mathbf{K}(\Delta(A))$ داریم:

$$\begin{aligned}\|\hat{a} - \hat{a}(\widehat{b - bc})\|_W &\leq \|\hat{a} - \widehat{a_1}\|_W + \|\widehat{a_1} - \widehat{a_1}\hat{b}\|_W + \|\widehat{a_1}\hat{b} - \hat{a}(\widehat{b - bc})\|_W \\ &\leq \|a - a_1\| + \epsilon + \|\widehat{a_1}\hat{b} - \hat{a}(\widehat{b - bc}) + \hat{b}\widehat{a_1}\hat{c}\|_W \\ &\leq 2\epsilon + \epsilon m(1+n).\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از گزاره ۲.٤.۱، M_{ϕ_0} دارای یک $w.b.c.w.a.i.$ است که اثبات را کامل می‌کند. ■

فصل سوم

مقسوم‌علیه

توپولوژیک صفر

۳ فصل سوم

۳.۱ مقدمه

در این بخش خانواده‌ای از جبرهای باناخ را ارائه می‌دهیم که هر عضو آن یک TDZ است. توجه می‌کنیم که قضیه اول در بخش بعد در مقاله $[SBHxx, Theorem\ 1.2]$ ثابت شده است. در این قضیه از خواص همانی‌های تقریبی به بهترین شکل ممکن استفاده خواهیم کرد. این فصل در واقع بیان چند نتیجه از مقاله $[SBHxx]$ و سپس طرح چند سئوال در حوزه همانی‌های تقریبی است.

۳.۲ نتایج و سئوالات مطرح شده

این بخش را با قضیه اساسی زیر آغاز می‌کنیم که نشان می‌دهد هر عضو از یک جبر باناخ بدون همانی که دارای یک همانی تقریبی باشد یک TDZ است. سپس به طرح سئوالاتی در رابطه با این قضیه و TDZ می‌پردازیم.

۳.۲.۱ قضیه:

فرض کنیم A یک جبر باناخ بدون همانی (به ترتیب بدون همانی چپ و بدون همانی راست) است. همچنین فرض کنیم که A دارای یک همانی تقریبی دو طرفه (به ترتیب چپ و راست) $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ است (که لزوما کران‌دار نیست). آنگاه هر عضو A یک TDZ دوطرفه (به ترتیب راست و چپ) است.

برهان: اثبات را تنها در حالت دوطرفه ارائه می‌دهیم. ابتدا دقت می‌کنیم که تور $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ همگرا نیست، چون در غیر این‌صورت A دارای یک عضو همانی می‌شود که با فرض ما در تضاد است. در نتیجه $\epsilon > 0$ وجود دارد به قسمی که گزاره زیر برقرار می‌باشد:

برای هر $\lambda_0 \in \Lambda$ ، $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ وجود دارند به قسمی که $\lambda_1 \geq \lambda_0$ و $\lambda_2 \geq \lambda_0$ نامساوی $\|e_{\lambda_1} - e_{\lambda_2}\| \geq \epsilon$ برقرار است. اگر این اتفاق نیافتد آنگاه تناقض $e_\lambda \to e_{\lambda_0}$ برای یک $\lambda_0 \in \Lambda$ بدست خواهد آمد.

فرض کنیم $x \in A$ دلخواه است و $B(x,\delta)$ نشان دهنده گوی باز به مرکز x و شعاع $\delta > 0$ باشد. چون $\{xe_\lambda\}$ به x همگراست، برای هر $n \in \mathbb{N}$ می‌توانیم $\lambda_n \in \Lambda$ را به قسمی بیابیم که $xe_\lambda \in B\left(x,\frac{1}{n}\right)$ هرگاه $\lambda \geq \lambda_n$. به‌علاوه با استفاده با بحث فوق، می‌توانیم $\alpha_n, \beta_n \in \Lambda$ را بیابیم به قسمی که $\alpha_n \geq \lambda_n$، $\beta_n \geq \lambda_n$ و $\|e_{\alpha_n} - e_{\beta_n}\| \geq \epsilon$. برای هر n قرار می‌دهیم، $y_n := e_{\alpha_n} - e_{\beta_n}$. آنگاه $xy_n \to 0$ وقتی که $n \to \infty$ و $\{y_n\}$ به 0 همگرا نمی‌باشد. در نتیجه x یک TDZ چپ است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که x یک TDZ راست نیز می‌باشد و این برهان را تکمیل می‌نماید. ■

۳.۲.۲ نکته:

براحتی می‌توان بررسی کرد که خانواده جبرهای باناخی که در قضیه ۳.۲.۱ بدست آمد، شامل جبرهای باناخی که در قسمت نخست قضیه ۱.۱.۲۶ مطرح شد، می‌باشد. در واقع فرض کنیم $\{e_n\}$ یک پایه یکامتعامد برای A باشد. برای هر n، قرار می‌دهیم، $k_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$. آنگاه چون برای هر $x \in A$ داریم، $x = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m$ که α_mها اسکالر هستند، و چون $e_m e_n = \delta_{mn} e_n$ که δ_{mn} دلتای کرونکر[۱۵] است، براحتی قابل بررسی است که

$$\lim_{n\to\infty} xk_n = \lim_{n\to\infty} k_n x = x \qquad (x \in A).$$

بنابراین A دارای یک همانی تقریبی دوطرفه است.

۳.۲.۳ سئوالات:

۱. آیا بندهای دو و سه از قضیه ۱.۱.۲۶ نیز در شرایط قضیه ۳.۲.۱ صدق می‌کنند؟

۲. آیا قضیه ۳.۲.۳ را می‌توان برای همانی‌های تقریبی جدید که در فصل دوم به معرفی و بررسی آنها پرداختیم تعمیم بدهیم؟

۳. آیا می‌توانیم مفهومی ضعیف از TDZ را به همانی شیوه که مفهوم $b.w.a.i.$ از روی $b.a.i.$ بدست آمد تعریف کنیم؟

---

[۱۵] *Kronecker delta*

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی:

اساسی	Essential
برگشت	Involution
تابعک برازش	Evaluation functional
تبدیل گلفاند	Gelfand Transform
توپولوژی فشرده- باز	Compact-open topology
جبر	Algebra
جبر تابعی	Function algebra
جبر دیسکی	Disc algebra
جبر گروهی	Group algebra
سرشت	Character
ضرب پیپش	Convolution product
طبیعی	Natural
فضای دوگان	Dual space
گروه موضعا فشرد	Locally compact group
متناهی	Finite
محمل	Support
مدول	Module
مقسوم علیه توپولوژیک صفر	Topological divisor of zero
میانگین‌پذیر	Amenable
نامتناهی	Infinite
نقطه قله‌ای	Peak point
واحد تقریبی	Approximate unit
هم بعد	Codimension
همانی تقریبی (ضعیف)	(Weak) Approximate identity

نمایه:

باناخ A–مدول چپ ۸
تبدیل گلفاند ۷
توپولوژی فشرده–باز ۱۳
جبر اساسی ۸
جبر باناخ ۷
جبر تابعی ۹
جبر توپولوژیک ۱۳
جبر دنباله‌ای باناخ ۱۰
جبر دیسکی ۱۳
جبر سگال ۱۱
جبر فوریه ۱۲
جبر فیگا تالامانکا–هرتس ۱۲
جبر گروهی ۱۱
جبر لبگ– فوریه ۱۹
ضرب پیچش ۱۱
فضای دوگان ۸
فضای کاراکتری ۷
قضیه لپتین–هرتس ۱۲
گروه میانگین‌پذیر ۱۲
مقسوم علیه توپولوژیک صفر ۱۴
نقطه قله‌ای ۲۰
واحد تقریبی سی. دبلیو کران‌دار ۱۷
واحد تقریبی سی. دبلیو کران‌دار ضعیف ۱۷
واحد تقریبی نسبی کران‌دار ۱۱
همانی تقریبی سی. دبلیو کران‌دار ۱۶
همانی تقریبی سی. دبلیو کران‌دار ضعیف ۱۷
همانی تقریبی کران‌دار ۸
همانی تقریبی کران‌دار ضعیف ۱۰

مراجع:

[BD95]: S.J. Bhatt, H.V. Dedania, *Banach algebras in which every element is a topological divisor of zero*, Proc. Amer. Math. Soc. 123, 735–737, 1995.

[Dal00]: H. G. Dales. *Banach Algebras and Automatic Continuity*. Clarendon Press, Oxford, 2000.

[Der11]: A. Derighetti, *Convolution Operators on Groups*. Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[DÜ15]: H. G. Dales and A. Ülger. *Approximate identities in Banach function algebras*. Studia Math., 226:155–187, 2015.

[Fra05]: M. Fragoulopoulou. *Topological Algebras with Involution*. Elsevier, 2005.

[GL02]: F. Ghahramani and A. T-M. Lau. *Weak amenability of certain classes of Banach algebras without bounded approximate identities*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 133(357): 357–371, 2002.

[Her73]: C. Herz. *Harmonic synthesis for subgroups*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), XXIII(3):91–123, 1973.

[IT00]: J. Inoue and S-E. Takahasi. *Constructions of bounded weak approximate identities for Segal algebras on LCA groups*. Acta. Sci. Math. (Szeged), 66(1-2):257–271, 2000.

[JL77]: C. A. Jones and C. D. Lahr. *Weak and norm approximate identities are different*. Pacific J. Math., 72(1):99–104, 1977.

[Kan09]: E. Kaniuth. *A Course in Commutative Banach Algebras*. Springer Verlag, Graduate texts in mathematics, 2009.

[LF15]: J. Laali and M. Fozouni. *On Δ-weak φ-amenable Banach algebras*. U. P. B. Sci. Bull. Series A, 77(4):165–176, 2015.

[Pie84]: J. P. Pier. *Amenable Locally Compact Groups*. Wiley Interscience, New York, 1984.

[Rei71]: H. Reiter. L^1*-Algebras and Segal Algebras*. Number 231 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1971.

[Run02]: V. Runde. *Lectures on Amenability*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

[SBHxx]: F. Schulz, R. Brits, M. Hasse, *Identities, approximate identities and topological divisors of zero in Banach algebras*, J. Math. Anal. Appl. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.06.064.

[Sug90]: M. Sugiura. *Unitary Representations and Harmonic Analysis*, volume 44. North-Holland, second edition, 1990.

Abstract:

In this research plan, for some Banach algebras with non-empty character space, we define a new concept of approximate identity. Then we study this notion and compare our results with others. Also, we define a new concept of boundedness and then study and comparing this notion with the classic version of that. A lot of illuminating examples for showing the difference are presented. At the end, we investigate the relation between the existence of approximate identity and topological divisor of zero in Banach algebras and present some of the good research question.

Keywords: Banach algebra, character space, approximate identity, topologic divisor of zero.

Faculty of Science and Engineering

Department of Statistics and Mathematics

Final report of research plan

Title:

Notes on Approximate Identities of some Banach Algebras

By:

Mohammad Fozouni

February 2018