یک توصیف از گروه‌های موضعا فشرده کوانتومی میانگین‌پذیر

محمد فزونی، استادیار گروه ریاضی و آمار

دانشکده علوم پایه و فنی‌مهندسی، دانشگاه گنبدکاووس

fozouni@hotmail.com, fozouni@gonbad.ac.ir

چکیده: در این نوشتار کوتاه بعد از یادآوری مفاهیم گروه‌های موضعا فشرده کوانتومی و مدول‌های باناخ کاراکتر انژکتیو، یک توصیف از گروه‌های موضعا فشرده کوانتومی میانگین‌پذیر را مطرح نموده و سپس ارتباط این قضیه با یکی از سئوالات باز موجود در این زمینه تحقیقاتی را بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: گروه موضعا فشرده کوانتومی، گروه موضعا فشرده، جبر باناخ، مدول‌های باناخ، کاراکتر.

رده‌بندی موضوعی ۲۰۱۰: $46L86, 43A07, 46M10, 46H20$.

۱ مقدمه

کاسترمانس و وائس در $[KV00]$ مفهوم گروه‌های موضعا فشرده کوانتومی (در زمینه C^*–جبرها) را معرفی و مطالعه نمودند. یک منبع نسبتا خوب در زمینه گروه‌های کوانتومی با توضیحات نسبتا دقیق ولی بدون دربرداشتن اثبات قضایا، منبع $[K05]$ می‌باشد که برای افرادی توصیه می‌گردد که به تازگی قصد ورود به دنیای کوانتوم را دارند. این رده از گروه‌ها (البته لفظ گروه دقیقا به این معنی نیست که جنس هر گروه کوانتومی، دقیقا یک گروه به معنی کلاسیک آن است، این انتخاب کاملا جنبه قراردادی دارد) مثالی از یک رده از ساختارهایی هستند که در قضیه دوگانی پونتریاگین[۱] که تنها در مورد گروه‌های موضعا فشرده آبلی برقرار است، صدق می‌کنند. در واقع این قضیه بیان می‌نمود که اگر G یک گروه موضعا فشرده آبلی باشد، آنگاه $\hat{\hat{G}} = G$ که در این رابطه $\hat{G}$، دوگان G، برابر است با مجموعه تمام همریختی‌های پیوسته از G به دایره یکه در صفحه مختلط. اگر $\mathbb{G}$ نشان دهنده یک گروه موضعا فشرده کوانتومی باشد، ثابت شده است که (در هر دو حالت آبلی و غیر آبلی) $\mathbb{G}$ در قضیه پونتریاگین صدق می‌کند، یعنی دوگان دوم $\mathbb{G}$ برابر است با $\mathbb{G}$.

در تعریف یک گروه موضعا فشرده کوانتومی به طور کلی دو مسیر در متون تحقیقاتی ریاضی وجود دارد. مسیر اول با استفاده از C^*–جبرها که موضوع و محتوای مقاله $[KV00]$ می‌باشد و مسیر دوم استفاده از جبرهای فون نویمان که موضوع مقالات $[\mathrm{KV03}, D14]$ است، اما در نهایت هر دو مسیر و زمینه به یک ساختار واحد می‌رسند که آن را گروه موضعا فشرده کوانتومی می‌نامیم.

هلمسکی[۲] برای اولین بار مفاهیم مدول‌های باناخ انژکتیو، پروژکتیو و تخت را معرفی و مطالعه کرد و نتیجه‌ای مهم روی جبرهای باناخ میانگین‌پذیر به این صورت بدست آورد؛ هر مدول باناخ روی یک جبر باناخ میانگین‌پذیر، تخت است. عکس گزاره اخیر در این سال‌ها

---

[۱] *Pontryagin*
[۲] *Helemskii*

جزو یکی از سئوالات باز در حوزه مدول‌های باناخ است. در مقاله $[DP04]$، دلز و پولی‌یاکو[۳] یک جواب جزیی به سئوال فوق را ارئه داده‌اند، در واقع آنها فقط در حالت $A = L^1(G)$؛ جبر گروهی گروه G، مسئله را ثابت نمودند. یعنی نشان دادند که اگر هر $L^1(G)$–مدول تخت باشد، آنگاه $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است. نصراصفهانی و سلطانی رنانی در $[NS14]$ نشان دادند که سئوال فوق در حالتی که میانگین‌پذیری را با ϕ–میانگین‌پذیری و مدول تخت را با ϕ–تخت تعویض نمائیم، قضیه فوق و عکس آن برقرار است. اما هنوز کسی نتوانسته است که به این سئوال پاسخ قطعی بدهد.

در این مقاله، با توجه به دستاوردهای اخیر در حوزه گروه‌های کوانتومی موضعا فشرده و مفاهیم مدول‌های ϕ–انژکتیو، سعی بر آن داریم که یک توصیف جدید از گروه‌های کوانتومی موضعا فشرده میانگین‌پذیر ارائه دهیم. سپس بعد از مطرح نمودن یک سئوال، ارتباط قضیه مطرح شده خود با قضیه هلمسکی را نیز بیان خواهیم نمود.

۲ تعاریف اولیه

این بخش را با تعریف مفهوم یک گروه موضعا فشرده کوانتومی (با زمینه جبرهای فون نویمان) آغاز می‌نمائیم.

۲.۱ تعریف:

فرض کنیم M یک جبر فون نویمان است. چهارتایی $\mathbb{G} = (M, \Gamma, \varphi, \psi)$ را یک گروه موضعا فشرده کوانتومی می‌نامیم اگر دارای خواص ذیل باشد:

۱. نگاشت $\Gamma: M \to M \times M$ یک $*$– همریختی نرمال و یکال است به قسمی که $(\Gamma \otimes \iota)\Gamma = (\iota \otimes \Gamma)\Gamma$.

۲. تابع φ یک وزن نرمال، نیم–متناهی و صادق روی M است به قسمی که $\varphi\big((w \otimes \iota)\Gamma(x)\big) = \varphi(x)w(1)$ برای هر $w \in M_*^+$ و $x \in \mathcal{M}_\varphi^+$ که $\mathcal{M}_\varphi^+ = \{x \in M^+ : \varphi(x) < \infty\}$. تابع φ را وزن پایای چپ هار[۴] می‌نامیم.

۳. تابع ψ یک وزن نرمال، نیم–متناهی و صادق روی M است به قسمی که $\psi\big((\iota \otimes w)\Gamma(x)\big) = \psi(x)w(1)$ برای هر $w \in M_*^+$ و $x \in \mathcal{M}_\psi^+$. تابع ψ را وزن پایای راست هار می‌نامیم.

در ادامه به جای M می‌نویسیم $L^\infty(\mathbb{G})$ و پیش‌دوگان M را با $L^1(\mathbb{G})$ نمایش می‌دهیم. پیش‌دوگان نگاشت Γ یک ضرب کاملا انقباضی[۵] $*$ روی $L^1(\mathbb{G})$ القاء می‌کند که به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$< f * g, x > = < f \otimes g, \Gamma(x) > \qquad \big(f, g \in L^1(\mathbb{G}), x \in L^\infty(\mathbb{G})\big).$$

بنابراین $L^1(\mathbb{G})$ یک جبر باناخ تحت ضرب $*$ است.

با استفاده از گروه‌های موضعا فشرده، می‌توانیم دو مثال و رده مهم از گروه‌های کوانتومی موضعا فشرده را ارائه دهیم.

۲.۲ مثال:

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. قرار می‌دهیم $\mathbb{G}_{\mathrm{a}} = (L^\infty(G), \Gamma_a, \varphi_a, \psi_a)$ و $\mathbb{G}_{\mathrm{s}} = (VN(G), \Gamma_s, \varphi_s, \psi_s)$ که در رابطه اخیر، $L^\infty(G)$ فضای تمام کلاس‌های هم‌ارزی توابع اساسا کران‌دار است با پیش دوگان $L^1(G)$؛ جبر گروهی و $VN(G)$

---

[۳] *Dales and Polyakov*
[۴] *Haar*
[۵] *completely contractive*

جبر فون نویمان گروهی از G است با پیش‌دوگان $A(G)$؛ جبر فوریه G. فرض کنیم $\Gamma_a(f)(s,t) = f(st)$ و φ_a، ψ_a به ترتیب انتگرال‌گیری نسبت به اندازه هار چپ و راست از گروه G باشند. همچنین فرض کنیم $\Gamma_s(\lambda(t)) = \lambda(t) \otimes \lambda(t)$ که λ همان نمایش منظم چپ گروه G است و $\varphi_s = \psi_s$ وزن پلانشرل هاگروپ[۶] است، برای دیدن تعریف دقیق این مفهوم به $[T03,\ VII.3]$ مراجعه کنید. حال بررسی می‌گردد که $\mathbb{G}_a$ و $\mathbb{G}_s$ هر دو گروه‌های کوانتومی موضعا فشرده هستند.

از این لحظه به بعد قرار داد می‌کنیم که هر گروه کوانتومی موضعا فشرده را به طور خلاصه با نماد گ.ک.م.ف. نمایش دهیم. همچنین برای دیدن تعاریف مفاهیم تعریف نشده در زمینه گروه‌های کوانتومی و مقدمات آن، می‌توانید به منبع $[K05]$ مراجعه نمائید. خواننده علاقمند جهت ورود به دنیای گروه‌های کوانتومی نیاز به دانشی در حوزه‌های آنالیز هارمونیک، C^*–جبرها و جبرهای فون نویمان، نظریه عملگرها و آنالیز تابعی دارد و بدون داشتن معلومات کافی در این موارد ذکر شده، مطالعه گروه‌های کوانتومی بسیار سخت و طاقت‌فرساست.

۲.۳ نکته:

قابل توجه است که در هر گ.ک.م.ف. $\mathbb{G} = (L^\infty(\mathbb{G}), \Gamma, \varphi, \psi)$ پنج مورد موجود است که آنها را در ادامه فهرست می‌کنیم. این موارد برای مطالعه $\mathbb{G}$ حائز اهمیت فراوان هستند:

۱. دو عملگر یکانی ضربی W, V که Γ را به صورت ذیل تولید می‌کنند:

$$\Gamma(x) = W^*(1 \otimes x)W = V(x \otimes 1)V^*, \qquad \big(x \in L^\infty(\mathbb{G})\big).$$

۲. یک تابع متقاطر[۷] با تجزیه قطبی که مشابه با عضو وارون در یک گروه عمل می‌کند که در حالت خاص برابر است با $S(f)(r) = f(r^{-1})$.

۳. گروه کوانتومی دوگان $\widehat{\mathbb{G}}$ که در رابطه $\widehat{\widehat{\mathbb{G}}} = \mathbb{G}$ صدق می‌کند (قضیه پونتریاگین تعمیم یافته).

٤. اندازه‌های هار یکتا هستند به این معنی که اگر دو اندازه هار روی $\mathbb{G}$ موجود باشند، یکی ضرب اسکالری از دیگری است.

۵. عناصر مدولار که مشابه تابع مدولار در گروه‌های موضعا فشرده است که اندازه‌های چپ و راست را به یکدیگر مرتبط می‌سازد.

در $[NS14]$، نصراصفهانی و سلطانی رنانی مفهوم کاراکتر انژکتیویتی را معرفی کردند. سپس برخی از محققین ریاضی این مفهوم را دنبال و نتایجی را به رشته تحریر درآوردند، منابع $[EFL15, EFL16]$ را ببینید. در ادامه این بخش به یادآوری این مطالب می‌پردازیم.

فرض کنیم A یک جبر باناخ و $E \in A - \boldsymbol{mod}$ که در این رابطه $A - \boldsymbol{mod}$ نشان دهنده رده تمام A–مدول‌های چپ باناخ است. به طور مشابه رده $\boldsymbol{mod} - A$ شامل تمام A–مدول‌های راست باناخ تعریف می‌گردد. می‌توانیم E را به عنوان یک $A^\#$–مدول ($A^\#$، همان یکه‌سازی شده از جبر A است) با عمل زیر در نظر بگیریم:

$$(a, \lambda) \cdot x = a \cdot x + \lambda x \qquad (a \in A, \lambda \in \mathbb{C}, x \in E).$$

بعلاوه، فضای $B(A, E)$، شامل تمام عملگرهای خطی و کران‌دار از A به E، یک باناخ A–دو مدول با اعمال ذیل است:

---

[۶] *Haggerup's Plancherel weight*
[۷] *antipod*

$$(a \cdot T)(b) = T(ba), \quad (T \cdot a)(b) = T(ab) \quad (T \in B(A,E), a, b \in A).$$

فرض کنیم A یک جبر باناخ است و $\phi \in sp(A)$ که $sp(A)$ طیف جبر A شامل تمام تابعک‌های خطی و ضربی ناصفر از A باشد. برای هر $E \in A - \boldsymbol{mod}$ تعریف می‌کنیم:

$$I(\phi, E) = span\{a \cdot x - \phi(a)x : a \in A, x \in E\}.$$

با اندکی تغییرات نسبت به نمادهای به کارگرفته شده در $[NS14]$، فرض کنیم:

$$B_\phi(A^\#, E) = \{T \in B(A^\#, E) : T(ab - \phi(b)a) = a \cdot T(b - \phi(b)e^\#), \forall a, b \in A\}.$$

دقت نمائید که در رابطه فوق $e^\# = (0,1)$ عضو همانی جبر $A^\#$ است.

فرض کنیم که نگاشت کانونی $\Pi_\phi^\#: E \to B_\phi(A^\#, E)$ را به صورت زیر تعریف می‌نمائیم:

$$\Pi_\phi^\#(x)(a) = a \cdot x \qquad (x \in E, a \in A^\#).$$

۲.٤ تعریف:

فرض کنیم $E, F \in A - \boldsymbol{mod}$ و $T: E \to F$ یک نگاشت خطی و کران‌دار باشد. می‌گوئیم نگاشت T پذیرفتنی[۸] است اگر نگاشت خطی و کران‌دار $S: F \to E$ موجود باشد به قسمی که $T \circ S \circ T = T$ و یا به طور معادل $\ker T$ در E مکمل و ImT در F بسته و مکمل باشد. در واقع اگر S موجود باشد، آنگاه $E = \ker T \oplus Im(S \circ T)$ و $F = ImT \oplus \ker(T \circ S)$.

۲.۵ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ، $\phi \in sp(A)$ و $E \in A - \boldsymbol{mod}$. می‌گوئیم E یک مدول ϕ-انژکتیو است اگر برای هر $F, K \in A - \boldsymbol{mod}$ و هر همریختی یک‌به‌یک و پذیرفتنی $T: F \to K$ که $I(\phi, K) \subseteq Im(T)$ نگاشت القایی $T_E: B_A(K,E) \to B_A(F,E)$ تعریف شده با $T_E(R) = R \circ T$ پوشا باشد، دقت کنید که در رابطه اخیر $B_A(K,E)$ فضای تمام همریختی‌های A-مدولی چپ از K به E است. به طور معادل نگاشت $\rho_\phi^\# \in B_A(B_\phi(A^\#, E), E)$ موجود باشد که یک وارون چپ برای نگاشت $\Pi_\phi^\#$ است، یعنی $\rho_\phi^\# \circ \Pi_\phi^\# = id_E$.

۲.٦ تعریف:

فرض کنیم A یک جبر باناخ، $\phi \in sp(A)$ و $E \in \boldsymbol{mod} - A$. می‌گوئیم E یک مدول ϕ-تخت است اگر $E^* \in \boldsymbol{mod} - A$، ϕ-انژکتیو باشد.

سایر مطالب و مفاهیم تعریف نشده در زمینه مدول‌های باناخ و مقدمات آن را می‌توانید در منبع [ف 93] مشاهده نمائید.

۲.۷ نکته:

اگر G یک گروه موضعا فشرده آبلی باشد، می‌دانیم که $sp(L^1(G)) = \hat{G}$ اما، با توجه به مقاله $[KN13]$، اگر $\mathbb{G}$ یک گ.م.ف.ک. باشد، طیف جبر باناخ $L^1(\mathbb{G})$ برابر است با

---

[۸] $admissible$

$$sp\big(L^1(\mathbb{G})\big) = \Big\{y \in L^\infty(\mathbb{G}) : \text{ وارون‌پذیر است } y \text{ و } \Gamma(y) = y \otimes y\Big\}.$$

۲.۸ تعریف:

فرض کنیم $\mathbb{G} = (L^\infty(\mathbb{G}), \Gamma, \varphi, \psi)$ یک گ.م.ف.ک. است و $y_0 \in sp\big(L^1(\mathbb{G})\big)$. آنگاه

- می‌گوئیم $\mathbb{G}$ میانگین‌پذیر است، اگر تابعک خطی و کران‌دار M روی $L^\infty(\mathbb{G})$ موجود باشد به قسمی که $||M|| = M(1) = 1$ و برای هر $x \in L^\infty(\mathbb{G}), f \in L^1(\mathbb{G})$، $M(x \cdot f) = f(1)M(x)$ که در این رابطه $x \cdot f = (\iota \otimes f)\Gamma(x)$.
- می‌گوئیم $\mathbb{G}$، y_0-میانگین‌پذیر است، اگر تابعک خطی و کران‌دار M روی $L^\infty(\mathbb{G})$ موجود باشد به قسمی که $M(y_0) = 1$ و برای هر $x \in L^\infty(\mathbb{G}), f \in L^1(\mathbb{G})$، $M(x \cdot f) = f(y_0)M(x)$.

قسمت دوم تعریف فوق معادل با این واقعیت است که جبر باناخ $L^1(\mathbb{G})$، y_0-میانگین‌پذیر است. توجه کنید که اگر A یک جبر باناخ و $\phi \in sp(A)$، می‌گوئیم A، ϕ-میانگین‌پذیر است اگر $F \in A^{**}$ موجود باشد به قسمی که $F(\phi) = 1$ و برای هر $a \in A, f \in A^*$ رابطه ذیل برقرار باشد:

$$F(a \cdot f) = \phi(a)F(f).$$

۳ نتیجه اصلی

در این بخش به ذکر نتیجه اصلی این مقاله می‌پردازیم، همچنین یک سئوال اساسی و چند نکته در ارتباط با آن را مطرح می‌کنیم. توجه کنید که اثبات قضیه ذیل را می‌توانیم به صورت مستقیم بدست آوریم که در این شرایط نیاز به بیان چند لم مقدماتی داریم، همچنین می‌توانیم اثبات را به صورت غیر مستقیم و با توجه به قضیه‌های موجود در متون تحقیقاتی اخیر بدست آوریم که در اینجا ما روش دوم را ترجیح داده‌ایم. هدف اصلی بیان یک ارتباط بین یک مفهوم مانستگی (همولوژی) جدید (ϕ-تخت) و یک مفهوم همانستگی (کوهمولوژی) است.

۳.۱ قضیه:

فرض کنیم $\mathbb{G} = (L^\infty(\mathbb{G}), \Gamma, \varphi, \psi)$ یک گ.م.ف.ک. است و $y_0 \in sp\big(L^1(\mathbb{G})\big)$. آنگاه گزاره‌های زیر با یکدیگر معادل هستند:

۱. $\mathbb{G}$ میانگین‌پذیر است.

۲. هر $J \in \boldsymbol{mod} - L^1(\mathbb{G})$، y_0-تخت است، یعنی $J^* \in L^1(\mathbb{G}) - \boldsymbol{mod}$، y_0-انژکتیو است.

اثبات: اگر A یک جبر باناخ باشد و $\phi \in sp(A)$، با توجه به $[NS14, Proposition\ 3.1]$ می‌دانیم که A، ϕ-میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر هر $J \in \boldsymbol{mod} - A$، ϕ-تخت باشد. از سوی دیگر با توجه به $[GNN17, Theorem\ 2.2]$ داریم که $\mathbb{G}$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر برای y_0ای از $sp\big(L^1(\mathbb{G})\big)$، y_0-میانگین‌پذیر باشد. بنابراین از این دو نتیجه و تعاریف موجود در بخش دوم نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

۳.۲ سئوال و نکته:

فرض کنیم $\mathbb{G} = (L^\infty(\mathbb{G}), \Gamma, \varphi, \psi)$ یک گ.م.ف.ک. است و $y_0 \in sp(L^1(\mathbb{G}))$. آیا هر مدول $L^1(\mathbb{G})$ باناخ y_0-انژکتیو، انژکتیو هم هست؟

اولا دقت کنید که در مقاله $[NS14]$ تنها با استفاده از یک جبر باناخ که دارای ساختاری بسیار واضح و روشن است، مولفین تمایز دو مفهوم انژکتیویتی و ϕ-انژکتیویتی را بیان نمودند؛ $[NS14, Example\ 2.5]$ را ببینید. اما امکان دارد که در حالتی که جبر باناخ، جبر گروهی کوانتومی باشد، این دو مفهوم معادل شوند. ثانیا، اگر پاسخ به سئوال فوق مثبت باشد، قضیه ۳.۱، یک تعمیم از گروه‌های موضعا فشرده به گ.م.ف.ک. از $[DP04, Theorem\ 4.9]$ است که نتیجه بسیار خوبی خواهد بود. همچنین مسئله باز مطرح شده در انتهای مقاله $[EFL16]$ نیز پاسخ داده خواهد شد، چون می‌دانیم که $L^1(\mathbb{G}_a) = L^1(G)$.

مراجع انگلیسی:

[D14] V. Daele. Locally compact quantum groups. a von Neumann algebra approach. Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 2014.

[DP04] H. G. Dales and M. E. Polyakov. Homological properties of modules over group algebras, Proc. London Math. Soc. 89 (2004), 390–426.

[EFL15] M. Essmaili, M. Fozouni and J. Laali. Hereditary properties of character injectivity with application to semigroup algebras. Ann. Funct. Anal., 6(2), 162-172, 2015.

[EFL16] M. Essmaili, M. Fozouni and J. Laali. ϕ-injectivity and character injectivity of Banach modules. U.P.B. Sci. Bull., Series A, 78(3), 43-52, 2016.

[GNN17] M. R. Ghanaei, R. Nasr-Isfahani, and M. Nemati. A homological property and Arens regularity of locally compact quantum groups. Canadian J. Math., 60: 122-130, 2017.

[KN13] M. Kalantar and M. Neufang. From quantum groups to groups. Canadian J. Math., 65: 1073-1094, 2013.

[KV00] J. Kustermans and S. Vaes. Locally compact quantum groups. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 33: 837-934, 2000.

[KV03] J. Kustermans and S. Vaes. Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting. Math. Scand., 92: 68-92, 2003.

[K05] Johan Kustermans. Locally compact quantum groups. Lect. Notes Math. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[NS14] R. Nasr-Isfahani and S. Soltani Renani. Character injectivity and projectivity of Banach modules. Quart. J. Math., 65(2), 665-679, 2014.

[T03] M. Takesaki. Theory of operator algebras. II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 125, Springer-Verlag, Berlin, 2003. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6.

مراجع فارسی

[ف 93] فزونی. م . خواص مانستگی و همانستگی جبرهای باناخ بر پایه سرشت‌ها، رساله دکتری، دانشگاه خوارزمی، ۱۳۹۳.