بسم الله الرحمن الرحیم

بنام خداوند جان و خرد

وزارت علوم تحقیقات و فناوری
دانشگاه گنبد کاووس

دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی

معاونت پژوهشی

گزارش نهایی طرح تحقیقاتی

خاصیت بی.اس.ایی برخی از جبرهای باناخ

مجری طرح:
محمد فزونی

گروه آمار و ریاضی

فروردین ۱۳۹۵

این طرح با تصویب و حمایت مالی حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه گنبدکاووس اجرا شده است.

شناسنامه طرح

دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی

معاونت پژوهشی

۱- عنوان: خاصیت بی.اس.ایی برخی از جبرهای باناخ

Subject: BSE-property of some Banach algebras

۲- مجری طرح: محمد فزونی

۳- همکاران طرح:

٤- ناظر:

٥- مشاور:

٦- تاریخ تصویب طرح در شورای پژوهشی: ۹٤/۱۰/۳۰

۷- تاریخ شروع: ۹٤/۱۱/۱ **تاریخ خاتمه: ۹٥/۱/۳۰**

۸- اعتبار: ۲۲٥۰۰۰۰ ریال

۹- محل تامین اعتبار: دانشگاه گنبد کاووس- گرنت پژوهشی

۱۰- شناسه طرح: پرونده بشماره ٦/٥۰۲

گواهی:

گواهی می‌شود گزارش نهایی طرح پژوهشی فوق در جلسه مورخ شورای پژوهشی دانشگاه مطرح و به تصویب رسید.

تقدیم به

تمام اندیش‌مندان، به خصوص

آنهایی که

"می‌دانند، که هیچ نمی‌دانند"

تقدیر و تشکر:

خداوند را هزاران مرتبه شکر که به این بنده توانایی و توفیق کسب ذره‌ای از دریای بی‌کران علم خود را داد و تا به امروز در لحظه لحظه‌های زندگی‌ام مرا در پناه خود حفظ نمود و بی‌منت به من عطا کرد.

از خانواده‌ام، به خصوص همسر عزیزم، کمال تقدیر و تشکر را دارم که در طول انجام این کار، بنده را با توجه‌هایشان حمایت و یاری نمودند.

از مدیریت پژوهشی دانشگاه گنبدکاووس کمال تشکر را دارم که با تمام مشغله‌های کاری، روند بررسی و تصویب پیشنهادیه اولیه این طرح را در کوتاه‌ترین زمان ممکن به سرانجام رساندند.

چکیده

در این طرح پژوهشی ابتدا تعاریف و مقدمات لازم جبرهای بی.اس.ایی را که در سال ۱۹۹۰ توسط دو ریاضی‌دان ژاپنی با نام‌های تاکاهاشی و هاتوری معرفی شدند ارائه می‌نمائیم. سپس به توصیف اینکه چه وقت جبرهای سگال $A_{\tau(n)}$، که در سال ۲۰۱٤ توسط اینویی و تاکاهاشی معرفی شد، دارای این خاصیت هستند می‌پردازیم. در ادامه به معرفی یک جبر باناخ جدید که از جبر گروهی $L^1(G)$ بدست آمده می‌پردازیم و سعی بر آن داریم که مشخص کنیم این جبر باناخ چه وقت یک جبر بی.اس.ایی هست.

کلمات کلیدی: جبر باناخ، گروه موضعا فشرده، جبر بی.اس.ایی، فضای کاراکتری

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

تعاریف و مقدمات اولیه

۱ فصل اول

۱.۱ تعاریف مقدماتی

در این فصل تعاریف و مقدمات لازم برای خواننده‌ای که آشنایی لازم و کافی با مفاهیم آنالیز تابعی و هارمونیک را ندارد، از منابع $[Dal00], [Kan09], [Lar69], [TH90]$ ارائه می‌دهیم.

۱.۱.۱ تعریف

فرض کنیم $(A, ||\cdot||)$ یک جبر نرم‌دار باشد. این جبر نرم‌دار را یک جبر باناخ[1] می‌نامیم اگر کامل باشد و نرم A در نامساوی ذیل صدق کنید:

$$||ab|| \leq ||a||||b|| \qquad (a, b \in A).$$

جبر باناخ A را جابجایی می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم، $ab = ba$.

۱.۱.۲ تعریف

فضای کاراکتری[2] یا فضای سرشت‌های جبر باناخ A را با نماد $\Delta(A)$ نمایش می‌دهیم که برابر است با تمام نگاشت‌های ناصفر $\varphi: A \to \mathbb{C}$ به قسمی که φ خطی و ضربی است، یعنی

$$\varphi(\lambda a + b) = \lambda\varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad (a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}).$$

[1] $Banach$
[2] $Character\ space$

بــرای هــر $\varphi \in \Delta(A)$ بــا توجــه بــه $[Kan09, Lemma\ 2.1.5]$ داریــم، $\|\varphi\| \leq 1$. بنــابراین $\Delta(A) \subseteq A^*$، که در آن A^* برابر است با فضای دوگان جبر A شامل تمام تابعک‌های خطی و کران‌دار روی A. همچنین با توجه به $[Kan09, Theorem\ 2.2.3]$، ملاحظه می‌کنیم که $\Delta(A)$ با توپولـوژی ضعیف- ستاره القایی از A^*، یک فضای موضعا فشرده و هاسدورف است.

۱.۱.۳ تعریف

جبر باناخ جابجایی A را نیم ساده می‌نامیم اگر اشتراک $ker(\varphi)$ برای هر $\varphi \in \Delta(A)$ برابر با صفر باشد.

از قضایای نظریه نمایش گلفاند[1] در جبرهای باناخ نتیجه می‌شود که اگر A یک جبر باناخ جابجایی و نیم ساده باشد، آنگاه $\Delta(A)$ ناتهی است. برای توضیح بیشتر در این زمینه به منبع $[Kan09]$ مراجعه نمائید.

۱.۱.٤ تعریف

جبر باناخ A را منظم می‌نامیم اگر بـرای هـر زیـر مجموعـه بسـته $E \subseteq \Delta(A)$ و $\varphi_0 \in \Delta(A) \setminus E$، $x \in A$ موجود باشد به قسمی که $\varphi_0(x) \neq 0$ و برای هر $\varphi \in E$، $\varphi(x) = 0$.

۱.۱.۵ تعریف

جبر باناخ A را یک جبر توبریان[2] می‌نامیم اگر A_c در A چگال باشد که

$$A_c = \left\{a \in A : \text{فشرده است}\ \operatorname{supp} \hat{a}\right\}$$

و نگاشت $\hat{a}: \Delta(A) \to \mathbb{C}$ به صورت $\hat{a}(f) = f(a)$ برای هر $f \in \Delta(A)$ تعریف می‌شود و آنرا تبدیل گلفاند a می‌نامیم. همچنین برای هر تابع پیوسته $f: X \to \mathbb{C}$ روی فضای توپولوژیک X، محمل تابع f، $\operatorname{supp} f$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

[1] $I. Gelfand$
[2] $Tauberian$

۱.۱.۶ تعریف

فرض کنیم A یک جبر باناخ است. جبر A را بدون مرتبه می‌نامیم اگر $aA = \{0\}$ نتیجه بدهد که $a = 0$. به وضوح می‌توان بررسی کرد که هر جبر باناخ که دارای یک همانی تقریبی است، بدون مرتبه می‌باشد.

۱.۱.۷ تعریف

فرض کنیم A یک جبر باناخ است. عملگر خطی $T: A \to A$ را یک ضرب‌گر[۱] می‌نامند اگر در رابطه زیر صدق کند:

$$T(ab) = aT(b) \quad (a, b \in A).$$

مجموعه تمام ضرب‌گرهای جبر باناخ A را با نماد $\mathcal{M}(A)$ نمایش می‌دهیم. فضای $\mathcal{M}(A)$ با عمل ترکیب توابع را جبر ضرب‌گرها می‌نامیم.

۱.۱.۸ تعریف

فرض کنیم A یک جبر باناخ بدون مرتبه است. فضای $C_{BSE}\big(\Delta(A)\big)$ را مجموعه تمام نگاشت‌های $\sigma: \Delta(A) \to \mathbb{C}$ می‌نامند به قسمی که برای هر $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ از $\Delta(A)$ و اسکالرهای $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ثابت $C > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(\varphi_i)\right| \leq C \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i\right\|_{A^*}.$$

جبر باناخ A را یک جبر بی.اس.ایی[۲] می‌نامند هرگاه،

$$C_{\mathrm{BSE}}\big(\Delta(A)\big) = \widehat{\mathcal{M}(\mathrm{A})} = \{\hat{T} : T \in \mathcal{M}(A)\},$$

که $\hat{T}$ برابر است با تابع پیوسته و کرنداری روی $\Delta(A)$ که در رابطه زیر صدق می‌کند،

---

[1] *Multiplier*

[2] *BSE algebra*

$$\widehat{T(x)}(\varphi) = \hat{T}(\varphi)\,\hat{x}(\varphi) \quad \big(x \in A, \varphi \in \Delta(A)\big).$$

قضیه بعد منبعی مفید از جبرهای بی.اس.ایی را معرفی می‌کند.

۱.۱.۹ قضیه

هر C^*- جبر جابجایی یک جبر بی.اس.ایی است.

اثبات: مراجعه کنید به $[TH90, Theorem\ 3]$. ■

۱.۱.۱۰ قضیه

فرض کنیم A یک جبر باناخ بدون مرتبه است. در این صورت داریم:

الف: $C_{\text{BSE}}\big(\Delta(A)\big)$ یک زیر جبر از $C\big(\Delta(A)\big)$ است.

ب: $\|\cdot\|_{\text{BSE}}$ یک نرم جبری کامل روی $C_{\text{BSE}}\big(\Delta(A)\big)$ است.

پ: $C_{\text{BSE}}\big(\Delta(A)\big)$ جابجایی و نیم‌ساده است.

اثبات: مراجعه کنید به $[TH90, Lemma\ 1]$. ■

۱.۱.۱۱ تعریف

فرض کنیم G یک گروه و τ یک توپولوژی موضعا فشرده روی G است. G را یک گروه موضعا فشرده می‌نامیم اگر نگاشت‌های

$$\begin{array}{ll} G \times G \to G & G \to G \\ (a,b) \to ab & a \to a^{-1} \end{array}$$

با توپولوژی τ پیوسته باشند. یکی از قضایای اساسی و مهم در آنالیز هارمونیک، نشان می‌دهد که روی هر گروه موضعا فشرده، اندازه‌ای رادون[1] مانند λ وجود دارد.

[1] $Radon$

۱.۱.۱۲ نکته

قضیه الهام بخش زیر که توسط بوخنر[1]- شونبرگ[2] در حالت $G=\mathbb{R}$ در سال 1934 میلادی و توسط ابرلین[3] در سال 1955 میلادی برای یک گروه موضعا فشرده و آبلی دلخواه G ثابت گردید، باعث به وجود آمدن تعریف جبرهای بی.اس.ایی توسط تاکاهاشی و هاتوری شد، از این رو به این جبرها جبرهای بی.اس.ایی می‌گویند که به افتخار این سه ریاضی‌دان حرف اول اسم آنها در تعریف وارد شده است. ■

۱.۱.۱۳ قضیه (بوخنر- شونبرگ - ابرلین)

فرض کنیم σ یک تابع از $C_b(\hat{G})$ و β یک ثابت مثبت و حقیقی است. آنگاه گزاره‌های زیر معادل هستند:

الف: اندازه $\mu \in M(G)$ وجود دارد به قسمی که $\sigma=\hat{\mu}$ و $||\mu|| \le \beta$.

ب: برای هر تعداد متناهی از اعداد مختلط $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ و کاراکترهای $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ از $\hat{G}$ داریم،

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i\sigma(\gamma_i)\right| \le \beta \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i\right\|_{L^\infty(G)}.$$

اثبات: مراجعه کنید به $[Rud62, Theorem\ 1.9.1,\ pp. 32]$. ■

دقت می‌کنیم که چون طبق قضیه وندل[4] داریم،

$$\mathcal{M}\left(L^1(G)\right)=M(G)$$

و همچنین چون، $L^1(G)^*=L^\infty(G)$ نتیجه می‌گیریم که جبر باناخ $L^1(G)$ یک جبر بی.اس.ایی هست. همچنین چون $L^1(G)$ دارای یک همانی تقریبی است، پس یک جبر بدون مرتبه نیز می‌باشد. همچنین توجه می‌کنیم که اگر G جابجایی و غیرگسسته باشد، $L^1(G)$ یک جبر باناخ جابجایی نیم‌ساده منظم و بدون عضو همانی است.

[1] *Bochner*
[2] *Schoenberg*
[3] *Eberlein*
[4] *Wendel*

۱.۱.۱۴ قضیه (هلی[1])

فرض کنیم $(X, ||\cdot||)$ یک فضای نرم‌دار ، $M > 0$، $c_1, c_2, \ldots, c_n$ و $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ عناصری از X^* باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معدل هستند:

الف: برای هر $\epsilon > 0$، $x_\epsilon \in X$ وجود دارد به قسمی که $||x_\epsilon|| < M + \epsilon$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، داریم $x_i^*(x_\epsilon) = c_i$.

ب: برای هر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ از اسکالرها نامساوی زیر برقرار است:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i a_i\right| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*\right\|_{X^*}.$$

اثبات: مراجعه کنید به $[Lar73, Theorem\ 4.10.1]$. ■

۱.۱.۱۵ قضیه

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابجایی بدون مرتبه است.

الف: $C_{BSE}(\Delta(A))$ برابر است با مجموعه تمام $\sigma \in C_b(\Delta(A))$ به قسمی که تور کران‌دار (x_λ) در A وجود دارد به طوری که برای هر $\varphi \in \Delta(A)$، $\lim_\lambda \varphi(x_\lambda) = \sigma(\varphi)$.

ب: $C_{BSE}(\Delta(A)) = C_b(\Delta(A)) \cap A^{**}_{|\Delta(A)}$.

اثبات: مراجعه کنید به $[TH90, Theorem\ 4]$. ■

۱.۱.۱۶ تعریف

فرض کنیم A یک جبر باناخ است و $\Delta(A) \neq \emptyset$. تور (e_α) در A را یک همانی تقریبی کران‌دار ضعیف می‌نامیم اگر (e_α) در A کران‌دار باشد و برای هر $a \in A$

$$\lim_\alpha \varphi(ae_\alpha) = \varphi(a) \quad \big(\varphi \in \Delta(A)\big).$$

---

[1] $E. Helly$

به طور معادل عبارت فوق برابر است با ایـن کـه، $\lim_{\alpha} \varphi(e_{\alpha}) = 1$. همـانی‌هـای تقریبـی کـران‌دار ضعیف برای اولین بار در سال 1977 میلادی توسط جونز[1] و لاهر[2] در $[JL77]$ ارائه شد.

۱.۱.۱۷ قضیه

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابجایی بدون مرتبه است. در این صـورت، $\widehat{\mathcal{M}(A)} \subseteq C_{BSE}\big(\Delta(A)\big)$ اگر و تنها اگر A دارای یک همانی تقریبی کران‌دار ضعیف باشد.

اثبات: مراجعه کنید به $[TH90, Corollary\ 5]$. ■

۱.۱.۱۸ تعریف

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی موضعا فشرده و هاسدورف است. زیر جبر $A \subseteq C_0(X)$ را یک جبر تابعی باناخ می‌نامیم اگر A نقاط X را به طور قوی جدا کند، یعنی بـرای هـر $x, y \in X$، $f \in A$ موجود باشد به قسمی که $f(x) \neq f(y)$ و برای هر $x \in X$، $f \in A$ موجـود باشـد بـه قسـمی کـه $f(x) \neq 0$ و نرم $||\cdot||$ روی A موجود باشد به طوری که $(A, ||\cdot||)$ یک جبر بانـاخ اسـت. رابطـه زیر بین نرم $||\cdot||_X$ از فضای $C_0(X)$ و نرم $||\cdot||$ از A وجود دارد:

$$||f||_X = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \leq ||f|| \quad (f \in A).$$

رابطه فوق با توجه به این نکته که نرم هر کاراکتر از یک جبر باناخ، همواره از یک کوچکتر است، بدست می‌آید، یا به عبارتی برای هر $x \in X$ داریم،

$$|f(x)| = |\varphi_x(f)| \leq ||\varphi_x|| ||f|| \leq ||f||.$$

جبر تابعی باناخ A روی X را طبیعی مـی‌نامنـد اگـر $\Delta(A) = X$، یعنـی نگاشـت $x \to \varphi_x$ از X بـه $\Delta(A)$ یک همسان‌ریختی باشـد کـه در آن φ_x تابعـک مقـداری در x نامیـده اسـت کـه بـه صـورت $\varphi_x(f) = f(x)$ برای هر $f \in A$، تعریف می‌گردد.

---

[1] $C.A.Jones$
[2] $C.D.Lahr$

۱.۱.۱۹ قضیه

فرض کنیم A یک جبر تابعی باناخ باشد به طوری که یک ایده‌ال در A^{**} و دارای یک همانی تقریبی کران‌دار ضعیف است. آن‌گاه A دارای یک همانی تقریبی کران‌دار است.

اثبات: مراجعه کنید به $[DU15, Proposition\ 3.1]$. ■

۱.۱.۲۰ تعریف

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. برای $1 < p < \infty$ جبر فیگا-تالامانکا-هرز[1] $A_p(G)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$A_p(G) = \left\{ f : f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i * \check{g}_i , f_i \in L_p(G), g_i \in L_q(G), \sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||_p ||g_i||_q < \infty \right\}$$

که در رابطه فوق q مزدوج نمایی p است، یعنی $p^{-1} + q^{-1} = 1$ و $\check{g}_i(a) = g_i(a^{-1})$. با توجه به قضایای آنالیز هارمونیک می‌توان نشان داد که $A_p(G)$ با ضرب نقطه‌وار و جمع معمولی توابع مختلط-مقدار، یک زیر جبر از $C_0(G)$ است که با نرم زیر تبدیل به یک جبر باناخ می‌شود:

$$||f|| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||_p ||g_i||_q : f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i * \check{g}_i \right\}.$$

همچنین می‌دانیم که $A_p(G)$ یک جبر تابعی باناخ جابجایی، نیم‌ساده و طبیعی است. جبر فیگا-تالامانکا-هرز را در حالتی که $p = 2$، جبر فوریه می‌نامند و آن را با نماد $A(G)$ نشان می‌دهند. البته قابل ذکر است که ابتدا جبر فوریه توسط ایمارد[2] در سال 1964 میلادی ارائه شد. سپس در سال 1965 ریاضی‌دان ایتالیایی ساندرو فیگا-تالامانکا[3] در حالت گروه‌های آبلی ارائه شد و در نهایت در همین سال، ریاضی‌دان کانادایی با نام کارل هرتس[4] این جبرها را به شکل کنونی فوق معرفی نمود و به مطالعه آنها پرداخت. یکی از منابع خوب و مفید برای مطالعه این جبرها، منبع $[Der11]$ است.

---

[1] $Figa - Talamanca - Herz$
[2] $P. Eymard$
[3] $A. Figa - Talamanca$
[4] $C. Herz$

۱.۱.۲۱ تعریف

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. G را یک گروه میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر تابعک خطـی و کران‌دار $\Lambda: L^{\infty}(G) \to \mathbb{C}$ موجود باشد به طوری که $\Lambda(1) = ||\Lambda|| = 1$ و

$$\Lambda(L_x f) = \Lambda(f) \qquad \big(x \in G, f \in L^{\infty}(G)\big)$$

که در رابطه فوق $L_x f$ به صورت $L_x f(y) = f(x^{-1}y)$ برای هر $y \in G$ تعریف می‌گردد.

۱.۱.۲۲ قضیه

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

الف: $A(G)$ یک جبر بی.اس.ایی است.

ب: G یک گروه میانگین‌پذیر است.

پ: $A(G)$ دارای یک همانی تقریبی کران‌دار ضعیف است.

اثبات: مراجعه کنید به $[KU10, Theorem\ 5.1]$. ■

با استفاده از قضیه فوق می‌توانیم اثبات ساده‌ای از قضیه بوخنر– شونبرگ – ابرلین را ارائه دهیم. یادآور می‌شویم که دوگان گروه موضعا فشرده و آبلی G به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\hat{G} = \left\{\gamma: G \to T : \text{یک همریختی پیوسته است } \gamma \right\}.$$

ثابت می‌شود که $\hat{G}$ با عمل ضرب نقطه‌وار توابع و توپولوژی گلفاند که از $\left(L^1(G)\right)^* = L^{\infty}(G)$ به ارث می‌برد، تبدیل به یک گروه موضعا فشرده و آبلی می‌شود. برای مطالعه بیشتر در زمینه دوگان گروه G به $[Kan09, Section\ 2.7]$ مراجعه کنید.

۱.۱.۲۳ نتیجه

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و آبلی است. در این صورت $L^1(G)$ یک جبر بی.اس.ایی است.

اثبات: می‌دانیم که $A(\hat{G})$ به طور یکمتر با $L^1(G)$ یکریخت است. از طرفی بنا به قضیه فوق $A(\hat{G})$ یک جبر بی.اس.ایی است، چون $\hat{G}$ یک گروه موضعا فشرده و آبلی است. در نتیجه $L^1(G)$ نیز یک جبر بی.اس.ایی است. ■

در رابطه با ایده‌ال‌های بسته جبرهای فوریه قضیه زیر را داریم.

۱.۱.۲٤ قضیه

فرض کنیم G یک گروه میانگین‌پذیر موضعا فشرده و I یک ایده‌ال بسته از $A(G)$ است. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

الف: I یک جبر بی.اس.ایی است.

ب: I دارای یک همانی تقریبی کراندار ضعیف است.

پ: برای یک مجموعه E در $\mathcal{R}_c(G)$، $I = I(E) = \{u \in A(G) : \ u(x) = 0 \ \ \forall x \in G\}$ که در آن

$$\mathcal{R}_c(G) = \left\{ E \in \mathcal{R}(G_d) \ : \ \text{بسته است } E \right\},$$

و $\mathcal{R}(G)$ برابر است با حلقه بولین[1] زیر مجموعه‌های G_d که توسط هم دسته‌های چپ زیر گروه‌های G_d تولید شده است. توجه می‌کنیم که G_d همان گروه G مجهز به توپولوژی گسسته است و یک حلقه بولین، حلقه‌ای مانند R است که در آن $x^2 = x$ برای هر $x \in R$، یعنی R تنها شامل عناصر خودتوان است.

اثبات: مراجعه کنید به $[KU10, Theorem\ 5.3]$. ■

۱.۱.۲۵ قضیه

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده است به طوری که یک ایده‌ال در A^{**} می‌باشد. آنگاه گزاره‌های زیر معادل هستند:

الف: A یک جبر بی.اس.ایی است.

---

[1] $Boolean\ ring$

ب: A دارای یک همانی تقریبی ضعیف کران‌دار است.

پ: A دارای یک همانی تقریبی کران‌دار است.

اثبات: مراجعه کنید به $[KU10, Theorem\ 3.1]$. ■

۱.۱.۲۶ نتیجه

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده است به طوری که یک ایده‌ال در A^{**} می‌باشد. همچنین فرض کنیم A یک جبر بی.اس.ایی است و I یک ایده‌ال بسته در A است. آنگاه

الف: $\frac{A}{I}$ یک جبر بی.اس.ایی است.

ب: I یک جبر بی.اس.ایی است اگر و تنها اگر I دارای یک همانی تقریبی کراندار باشد.

اثبات: مراجعه کنید به $[KU10, Corollary\ 3.3]$. ■

۱.۱.۲۷ نکته

با توجه به $[KU10, Remark\ 3.5]$ می‌دانیم که اگر A یک جبر باناخ جابجایی، نیم‌ساده، توبریان و $\Delta(A)$ گسسته باشد، آنگاه A یک ایده‌ال در A^{**} است. در واقع برای هر $a \in A$ که $\hat{a}$ دارای محمل متناهی است، عملگر ضرب $L_a: x \to ax$ یک عملگر متناهی رتبه روی A است و چون A یک جبر توبریان است و چنین عناصری در A چگال هستند، پس عملگر L_a برای هر $a \in A$ فشرده است، چون حد یک دنباله از عملگرهای متناهی رتبه و از این رو فشرده می‌باشد. ■

۱.۱.۲۸ تعریف

فرض کنیم $(A, ||\cdot||)$ یک جبر باناخ است. فضای نرم‌دار $(B, ||\cdot||_B)$ را یک جبر سگال مجرد نسبت به A می‌نامند اگر،

الف: اگر B یک ایده‌ال چگال در A و $(B, ||\cdot||_B)$ یک فضای باناخ باشد.

ب: ثابت $M > 0$ موجود باشد به قسمی که برای هر $b \in B$، $||b|| \leq M||b||_B$.

پ: ثابت $C > 0$ موجود باشد به قسمی که برای هر $a, b \in B$، $||ab||_B \leq ||a||||b||_B$.

۱.۱.۲۹ قضیه

فرض کنیم B یک جبر سگال مجرد نسبت به A باشد به قسمی کـه دارای یـک همـانی تقریبـی $\{e_\alpha\}$ است. اگر B یک زیر مجموعه حقیقی (سره) از A باشد، آنگاه $\{e_\alpha\}$ کراندار نیست.

اثبات: مراجعه کنید به $[Bur72, Theorem\ 1.2]$. ■

فصل دوم

نتایج اصلی

۲ فصل دوم

۲.۱ مقدمه

در این بخش، فرض کنیم B یک جبر باناخ جابجایی، نیم‌ساده، منظم و بدون یکه باشد که دارای یک همانی تقریبی کراندار در B_c است.

۲.۱.۱ تعریف

ایده‌ال S در B را یک جبر سگال در B می‌نامیم اگر S دارای خواص زیر باشد:

الف: S در B چگال است.

ب: S تحت نرم $||\cdot||_S$ یک فضای باناخ است به قسمی که برای هر $a \in S$، $||a||_B \leq ||a||_S$.

پ: برای هر $a \in B$ و $x \in S$، $||ax||_S \leq ||a||_B||x||_S$.

ت: S دارای یک واحد تقریبی است.

به وضوح مشاهده می‌کنیم که یک جبر سگال مجرد در B (به معنی و عقیده برنهام[1] [Bur72]) یک جبر سگال در B است اگر و تنها اگر دارای یک واحد تقریبی باشد.

[1] $J.T.Burnham$

۲.۲ یک توصیف از جبرهای سگال بی.اس.ایی

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی موضعا فشرده و هاسدورف و $(A, ||\cdot||)$ زیر جبری تابعی از $C_0(X)$ باشد به طوری که، طبیعی، منظم و دارای یک همانی تقریبی کراندار $\{e_\alpha\}$ مشمول در A_c است.

۲.۲.۱ تعریف

تابع مختلط- مقدار σ روی X را یک تابع A- موضعی می‌نامیم اگر برای هر $f \in A_c$، تابع $f\sigma$ متعلق به A باشد. در ادامه A_{loc} را مجموعه تمام توابع A- موضعی روی X در نظر می‌گیریم.

۲.۲.۲ تعریف

فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت و τ یک تابع مختلط- مقدار روی X است. قرار می‌دهیم:

$$A_{\tau(n)} = \{f \in A \;:\; f\tau^k \in A \quad (0 \le k \le n)\}$$
$$||f||_{\tau(n)} = \sum_{k=0}^{n} ||f\tau^k||$$

با توجه به $[IT14, Theorem\ 5.4]$ می‌دانیم که اگر $\tau \in A_{\mathrm{loc}}$ آنگاه، $\left(A_{\tau(n)}, \ ||\cdot||_{\tau(n)}\right)$ یک جبر سگال در A است به قسمی که $\Delta\left(A_{\tau(n)}\right) = \Delta(A) = X$، یعنی نگاشت $x \to \varphi_x$ یک همسانریختی از X به $\Delta\left(A_{\tau(n)}\right)$ است. همچنین به براحتی می‌توان نشان داد که $A_c \subseteq A_{\tau(n)}$، یعنی $A_{\tau(n)}$ شامل تمام توابع پیوسته مختلط- مقدار روی X با بستار فشرده است.

۲.۲.۳ لم

$\left(A_{\tau(n)}, \ ||\cdot||_{\tau(n)}\right)$ یک جبر تابعی باناخ است.

اثبات: فرض کنیم $x, y \in X$ و $x \neq y$. چون $\varphi_x \neq \varphi_y$، پس $f \in A$ وجود دارد به قسمی که

$$f(x) = \varphi_x(f) \neq \varphi_y(f) = f(y).$$

از طرفی طبق لم اوریسون، برای هر $x \in X$، $f \in A_c \subseteq A$ وجود دارد به قسمی که $f(x) \neq 0$.
همچنین با توجه به تعریف نرم $||\cdot||_{\tau(n)}$ براحتی می‌توان نشان داد که برای هر $f \in A$، $||f||_X \leq ||f||_{\tau(n)}$. ■
قضیه زیر یک شرط کافی برای بی.اس.ایی بودن جبر A را ارائه می‌دهد. در واقع تحت شرایطی نشان می‌دهد که این خاصیت از ایده‌ال $A_{\tau(n)}$ به خود جبر A منتقل می‌شود.

۲.۲.٤ قضیه

فرض کنیم $\tau \in A_{\text{loc}}$ و $A_{\tau(n)}$ یک ایده‌ال در دوگان دوم‌اش است. اگر $A_{\tau(n)}$ یک جبر بی.اس.ایی باشد، آنگاه A نیز یک جبر بی.اس.ایی است.
برهان: فرض کنیم $A_{\tau(n)}$ یک جبر بی.اس.ایی است. در نتیجه طبق قضیه ۱.۱.۱۷، دارای یک همانی تقریبی کراندار ضعیف است. چون $A_{\tau(n)}$ یک ایده‌ال در دوگان دوم‌اش است، طبق قضیه ۱.۱.۱۹، $A_{\tau(n)}$ دارای یک همانی تقریبی کراندار است. اکنون با استفاده از قضیه ۱.۱.۲۹ نتیجه حاصل می‌گردد. ■
با توجه به قضیه فوق، در اینجا سئوالی مطرح می‌شود که تحت چه شرایطی $A_{\tau(n)}$ یک ایده‌ال در دوگان دوم خودش می‌شود؟

۲.۲.۵ نکته

اگر X یک فضای توپولوژیکی گسسته باشد، آنگاه $A_{\tau(n)}$ یک ایده‌ال در دوگان دوم خودش است.
چون، $A_{\tau(n)}$ یک جبر باناخ نیم‌ساده و جابجایی است به قسمی که طبق $[IT14, Theorem\ 3.5]$ توبریان نیز می‌باشد. در نتیجه طبق نکته ۱.۱.۲۷، $A_{\tau(n)}$ یک ایده‌ال در دوگان دوم خودش است. ■
در قضیه بعدی، با فرض $||\cdot|| = ||\cdot||_X$، به ارائه یک توصیف برای بی.اس.ایی بودن جبر $A_{\tau(n)}$ می‌پردازیم.

۲.۲.٦ قضیه

فرض کنیم $(A, ||\cdot||_X)$ یک جبر بی.اس.ایی است. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:
الف: $A_{\tau(n)}$ یک جبر بی.اس.ایی است.

ب: τ کراندار است.

اثبات: فرض کنیم $A_{\tau(n)}$ یک جبر بی.اس.ایی است که با توجه به قضیه ۱.۱.۱۷ دارای همانی تقریبی ضعیف کراندار $\{f_\alpha\}$ است. در نتیجه ثابت $M > 0$ وجود دارد به قسمی که

$$||f_\alpha||_{\tau(n)} < M, \quad \lim_\alpha f_\alpha(x) = 1 \qquad (x \in X).$$

اما می‌دانیم،

$$||f_\alpha \tau||_X \le ||f_\alpha \tau|| \le ||f_\alpha \tau||_{\tau(n)},$$

در نتیجه برای هر $x \in X$ داریم، $|\tau(x)| \le M$ و این یعنی τ کراندار است.

برعکس، فرض کنیم τ کراندار است، یعنی ثابت مثبت $M > 0$ وجود دارد به قسمی که، $||\tau||_X < M$. برای هر $f \in A$، تور $\{f_\alpha\}$ در A_c وجود دارد به قسمی که $||f_\alpha - f||_X \to 0$. حال داریم، $\{f_\alpha \tau\} \subseteq A$ و $f\tau = \lim_\alpha f_\alpha \tau$، چون

$$||f\tau - f_\alpha \tau||_X = ||(f - f_\alpha)\tau||_X \le M||f - f_\alpha||_X \to 0.$$

در نتیجه $f\tau \in A$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که برای هر $1 < k \le n$، $f\tau^k \in A$. در پایان با یک محاسبه سرراست می‌توان نشان داد که نرم‌های $||\cdot||_X$، $||\cdot||_{\tau(n)}$ با یکدیگر معادل هستند. در نتیجه $A_{\tau(n)}$ با A به طور یکریخت یکمتر است. پس $A_{\tau(n)}$ نیز یک جبر بی.اس.ایی است. ■

۲.۲.۷ نکته

لازم به ذکر است که اینوایی و تاکاهاشی در $[IT14, Theorem\ 9.10]$ نشان دادند که، اگر A یک جبر بی.اس.ایی و $\mathcal{S}$ یک جبر سگال در A باشد، آنگاه $\mathcal{S}$ یک جبر بی.اس.ایی است اگر و تنها اگر دارای یک همانی تقریبی ضعیف کراندار باشد. در قضیه ۲.۲.٦، ما به توصیف جامع‌تر و مناسب‌تری در مورد اینکه چه وقت $A_{\tau(n)}$ یک جبر بی.اس.ایی است پرداخته‌ایم. ■

با توجه به $[IT14, Definition\ 8.1]$، یادآوری می‌کنیم که $\tau \in A_{\mathrm{loc}}$ را یک تابع A- موضعی از رتبه نامتناهی می‌نامیم، اگر برای هر $k = 0,1,3, \ldots$، روابط $A_{\tau(k+1)} \subsetneq A_{\tau(k)}$ برقرار باشند.

۲.۲.۸ قضیه

فرض کنیم $\tau \in A_{\text{loc}}$. در این صورت اگـر $||\tau||_X = \infty$، آنگـاه τ یـک تـابع A- موضـعی از رتبـه نامتناهی است.

اثبات: مراجعه کنید به $[IT14, Proposition\ 8.2]$.■

قضیه بعدی که در واقع کاربردی از قضیه ۲.۲.٦ است، مثال‌هـای زیـادی از جبرهـای بانـاخ کـه دارای همانی تقریبی کراندار ضعیف نیستند را برای استفاده به عنوان منبعی از مثالهای نقض، محیـا مـی‌کنـد، چون می‌دانیم که رده وسیعی از جبرهای باناخ دارای این نوع همانی کراندار هسـتند و تنهـا چنـد رده محدود از این جبرها را تا به امروز شناخته‌ایم، به عنوان مثال اگر G یک گروه موضعا فشـرده باشـد و $1 < p$، آنگاه $A_p(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار ضعیف است اگر و تنها اگر G میـانگین‌پـذیر باشد، برای دیدن اثباتی از این قضیه به $[DU15, Proposition\ 3.11]$ مراجعه کنید. پس اگر G یک گروه میانگین‌ناپذیر باشد، $A_p(G)$ هیچ همانی تقریبی کراندار ضعیفی ندارد.

۲.۲.۹ قضیه

فرض کنیم τ یک تابع پیوسته مختلط- مقدار روی X است. در این صورت $\tau \in A_{\text{loc}}$ اگر و تنها اگـر برای هر $x \in X$ تابع $f \in A$ موجود باشد به قسمی که $\tau = f$ روی یک همسایگی از x.

اثبات: مراجعه کنید به $[IT14, Proposition\ 7.1]$.■

۲.۲.۱۰ نتیجه

فرض کنیم $A = C_0(\mathbb{R})$ و $\tau(x) = x$ برای هر $x \in \mathbb{R}$. آنگاه

$$A \supsetneqq A_{\tau(1)} \supsetneqq A_{\tau(2)} \supsetneqq \cdots \supsetneqq A_{\tau(n)} \supsetneqq \cdots \qquad (2.1)$$

از طرفی برای هر $k = 1, 2, 3, \ldots$، $A_{\tau(k)}$ یک جبر بی.اس.ایی نیست و از این رو دارای هیچ همـانی تقریبی کراندار ضعیف نمی‌باشد.

اثبات: با توجه به قضیه ۱.۱.۹، چون A یک C^*- جبر جابجایی است، در نتیجه یـک جبـر بی.اس.ایـی می‌باشد. چون برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f \in A$ وجود دارد به قسمی که $f = \tau$ روی یـک همسـایگی از x،

پس با توجه به قضیه ۲.۲.۹، نتیجه می‌گیریم که $\tau \in A_{\mathrm{loc}}$. اما τ یک تابع کرانـدار نیسـت و در نتیجـه طبق قضیه ۲.۲.۸، τ یک تابع A- موضعی از رتبه نامتناهی است و این نتیجه می‌دهد که رابطـه (2.1) برقرار است. در پایان با استفاده از نکته ۲.۲.۷، نتیجه می‌گیریم که هیچ کـدام از جبرهـای $A_{\tau(k)}$ بـرای $k = 1, 2, 3, \dots$، دارای همانی تقریبی کراندار ضعیف نیستند. ■

۲.۳ نتایج روی جبرهای گروهی

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و آبلی است. همچنین فرض کنیم $L^1(G)$ فضـای تمـام توابـع مختلط- مقدار اندازه‌پذیر و انتگرال‌پذیر (کلاس‌های هم‌ارزی، نسبت به رابطه برابری تقریبا همـه جـا) روی G نسبت به اندازه هار چپ آن، است.

برای هر $f, g \in L^1(G)$ فرض کنیم ضرب پیچش " * "، به صورت زیر تعریف شود:

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\, dy \qquad (x \in G).$$

برای هر $f \in L^1(G)$، فرض کنیم $||f||_1 = \int_G |f(x)|\, dx$. در این صورت $L^1(G)$ با نرم $||\cdot||_1$ و ضرب پیچش و جمع نقطه‌وار بین توابع، یک جبر باناخ است که آنرا جبر گروهی نیز مـی‌نامنـد. بـرای مطالعه بیشتر در مورد این جبرها به $[Dal00, Section\ 33]$ مراجعه کنید.

در ادامه مشابه با فرآیند ساخت جبر باناخ $A_{\tau(n)}$ که A یک جبر تابعی باناخ است، با اعمـال شـرایطی روی τ، سعی بر این داریم که A را با جبر گروهی تعویض نمائیم.

برای تابع اندازه پذیر $\tau: G \to \mathbb{C}$ و عدد صحیح و مثبت n، قرار می دهیم:

$$L^1(G)_{\tau(n)} = \{f \in L^1(G):\ \ f\tau, \dots, f\tau^k \in L^1(G)\}$$
$$||f||_{\tau(n)} = \sum_{k=0}^{n} ||f\tau^k||_1 \qquad \big(f \in L^1(G)\big).$$

یادآوری می‌کنیم که تابع $\varphi: G \to \mathbb{C}$ یک تابع زیر ضربی است اگر

$$|\varphi(xy)| \le |\varphi(x)||\varphi(y)| \qquad (x, y \in G).$$

۲.۳.۱ لم

فرض کنیم $\tau: G \to \mathbb{C}$ یک تابع زیر ضربی و اندازه‌پذیر است. در این صورت $L^1(G)_{\tau(n)}$ با ضرب پیچش و نرم $||\cdot||_{\tau(n)}$ یک جبر باناخ است.

اثبات: برای هر $f, g \in L^1(G)_{\tau(n)}$ و $1 \le k \le n$، داریم:

$$\begin{aligned} ||(f*g)\tau^k||_1 &\le \int\int |f(y)||g(y^{-1}x)||\tau^k(x)|dydx \\ &= \int\int |f(y)||g(y^{-1}x)||\tau^k(x)|dxdy \\ &= \int\int |f(y)||g(x)||\tau^k(yx)|dxdy \\ &\le ||f\tau^k||_1||g\tau^k||_1. \end{aligned}$$

چون τ اندازه‌پذیر است، $(f*g)\tau^k$ نیز اندازه‌پذیر است و با توجه به نامساوی‌های فوق داریم،

$$||(f*g)\tau^k||_1 \le \infty.$$

بنابراین $f*g$ متعلق به $L^1(G)_{\tau(n)}$ است. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} ||f*g||_{\tau(n)} &= ||f*g||_1 + \sum_{k=1}^{n} ||(f*g)\tau^k||_1 \\ &\le ||f||_1||g||_1 + \sum_{k=1}^{n} ||f\tau^k||_1\,||g\tau^k||_1 \\ &\le ||f||_{\tau(n)}||g||_{\tau(n)} \end{aligned}$$

برای اینکه نشان دهیم، $||\cdot||_{\tau(n)}$ یک نرم کامل است، فرض کنیم $\{f_i\}$ یک دنباله کوشی در $L^1(G)_{\tau(n)}$ است. در نتیجه $f \in L^1(G)$ و $g_k \in L^1(G)$ برای $k = 1, \dots, n$ وجود دارند به قسمی که،

$$\lim_{i\to\infty} ||f_i - f||_1 = 0, \quad \lim_{i\to\infty} ||f_i\tau^k - g_k||_1 = 0.$$

چون $\lim_{i\to\infty} ||f_i - f||_1 = 0$، زیر دنباله $\{f_{i_m}\}$ از $\{f_i\}$ وجود دارد به قسمی که تقریبا همه‌جا برای هر $x \in G$ داریم:

$$\lim_{i_m} f_{i_m}(x) = f(x)$$

همچنین چون $\lim_{i\to\infty} ||f_i\tau^k - g_k||_1 = 0$، زیر دنباله $\{f_{i_{m,k}}\}$ از $\{f_{i_m}\}$ وجود دارد به قسمی که تقریبا همه‌جا برای هر $x \in G$ داریم:

$$\lim_{i_{m,k}} f_{i_{m,k}}(x)\tau^k(x) = g_k(x).$$

بنابراین، $f\tau^k = g_k$ تقریبا همه جا. از این رو f یک عضو از $L^1(G)_{\tau(n)}$ است به قسمی که

$$\begin{aligned} ||f_i - f||_{\tau(n)} &= ||f_i - f||_1 + ||f_i\tau - f\tau||_1 + \cdots + ||f_i\tau^n - f\tau^n||_1 \\ &= ||f_i - f||_1 + ||f_i\tau - g_1||_1 + \cdots + ||f_i\tau^n - g_n||_1 \to 0. \end{aligned}$$

بنابراین، $\left(L^1(G)_{\tau(n)},\ ||\cdot||_{\tau(n)}\right)$ کامل است. ■

در قضیه بعدی، با اعمال شرایطی روی تابع τ نشان می‌دهیم که $L^1(G)_{\tau(n)}$ یک جبر بی.اس.ایی است.

۲.۳.۲ قضیه

اگر τ کراندار باشد، آنگاه $L^1(G)_{\tau(n)}$ یک جبر بی.اس.ایی است.

اثبات: اگر τ کراندار باشد، فرض می‌کنیم ثابت $M > 0$ وجود دارد به قسمی که برای هر $x \in G$، $|\tau(x)| \leq M$. حال برای هر $f \in L^1(G)$ و $k = 1, \dots, n$، داریم $f\tau^k \in L^1(G)$ و

$$||f||_1 \leq ||f||_{\tau(n)} = \sum_{k=0}^{n} ||f\tau^k||_1 \leq ||f||_1 \left(\sum_{k=0}^{n} M^k\right).$$

بنابراین، $L^1(G)_{\tau(n)}$ به صورت توپولوژیکی با $L^1(G)$ یکریخت است و در نتیجه $L^1(G)_{\tau(n)}$ طبق قضیه بوخنر- شونبرگ- ابرلین، یک جبر بی.اس.ایی است. ■

در ادامه، وقتی که تابع τ تقریبا همه جا در رابطه، $|\tau(x)| \geq 1$ صدق می‌کند، نشان خواهیم داد که $L^1(G)_{\tau(n)}$ در واقع یک جبر بورلینگ[1] است که ابتدا به یادآوری این جبرها می‌پردازیم.

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و آبلی است. یک وزن تابعی پیوسته مثل $w: G \to (0, \infty)$ است به قسمی که برای هر $x, y \in G$، $w(xy) \leq w(x)w(y)$. جبر بورلینگ $L^1(G, w)$ برابر است با فضای تمام توابع اندازه‌پذیر و مختلط- مقدار f روی G (کلاس‌های هم‌ارزی این توابع) به قسمی که

$$||f||_{1,w} = \int_G |f(x)|\, w(x)dx < \infty.$$

جبر بورلینگ، با ضرب پیچش و نرم $||\cdot||_{1,w}$ یک جبر باناخ است به قسمی که

$$\Delta\left(L^1(G, w)\right) = \hat{G}(w)$$

---

[1] $Beurling$

که در رابطه فوق $\widehat{G}(w)$ فضای تمام همریختی‌های مختلط- مقدار φ روی G است به قسمی که

$$|\varphi(x)| \leq w(x) \qquad (x \in G).$$

فضای $M(G,w)$ شامل تمام اندازه‌های بورل منظم مختلط- مقدار μ روی G به قسمی که $\mu w \in M(G)$، با ضرب پیچش و نرم $||\mu|| = \int_G w(x)\, d|\mu|(x)$ یک جبر باناخ است که آن را جبر اندازه وزن‌دار می‌نامیم.

همچنین $\left(C_0(G,w^{-1})\right)^* = M(G,w)$، که در آن $C_0(G,w^{-1})$ برابر است با فضای تمام توابع پیوسته مختلط- مقدار روی G به قسمی که $\frac{f}{g} \in C_0(G)$. برای مطالعه بیشتر در مورد فضاهای وزن‌دار به $[DL05]$ مراجعه کنید.

طبق $[FP06, Lemma\ 2.1]$، جبر ضرب‌گرهای $L^1(G,w)$، $\mathcal{M}(L^1(G,w))$ به طور یک‌متر با $M(G,w)$ یکریخت است.

۲.۳.۳ گزاره

اگر $|\tau| \geq 1$ تقریبا همه جا، آنگاه $L^1(G)_{\tau(n)}$ و $L^1(G,|\tau^n|)$ به طور توپولوژیکی یکریخت هستند.

اثبات: فرض کنیم که $|\tau(x)| \geq 1$ برای تقریبا همه جا $x \in G$ به وضوح اگر $f \in L^1(G)_{\tau(n)}$، آنگاه نتیجه می‌شود که $f \in L^1(G,|\tau^n|)$. از سوی دیگر، اگر $f \in L^1(G,|\tau^n|)$ با به‌کارگیری رابطه $|\tau| \geq 1$ تقریبا همه جا، نتیجه می‌شود که $f \in L^1(G)_{\tau(n)}$، چون برای هر $k = 0,1,\dots,n$ و برای تقریبا همه جا $x \in G$ داریم:

$$|f(x)||\tau^k(x)| \leq |f(x)||\tau^n(x)|.$$

همچنین، با استفاده مجدد از رابطه $|\tau| \geq 1$ تقریبا همه جا، داریم:

$$||f||_{1,w} \leq ||f||_{\tau(n)} \leq n||f||_{1,w}$$

که $w = |\tau^n|$. بنابراین نرم‌های $||\cdot||_{1,w}$ و $||\cdot||_{\tau(n)}$ هم‌ارز هستند و این اثبات را کامل می‌کند. ■

۲.۳.٤ لم

فرض کنیم C یک زیر مجموعه فشرده از گروه موضعا فشرده G است. در این صورت اعداد حقیقی مثبت a,b وجود دارند به قسمی که $a \leq w(x) \leq b$ برای هر $x \in C$.

اثبات: مراجعه کنید به $[Kan09, Lemma\ 1.3.3]$. ■

در حالت کلی تا به امروز، توصیف کاملی از اینکه چه وقت $L^1(G,w)$ یک جبر بی.اس.ایی است ارائه نشده است. در گزاره بعدی نشان می‌دهیم در حالتی که G فشرده است، $L^1(G,w)$ یک جبر بی.اس.ایی می‌باشد.

۲.۳.۵ گزاره

فرض کنیم G یک گروه فشرده و آبلی و w یک وزن روی G است. در این صـورت $L^1(G,w)$ یـک جبر بی.اس.ایی است.

اثبات: چون G فشرده است، بنا به لم ۲.۳.٤، اعداد حقیقی مثبت a,b وجود دارند به قسمی که

$$a \leq w(x) \leq b \quad (x \in G).$$

بنابراین برای هر تابع مختلط- مقدار f روی G داریم:

$$a|f(x)| \leq |f(x)|w(x) \leq b|f(x)| \quad (x \in G).$$

در نتیجه $L^1(G,w)$ به طور توپولوژیکی با $L^1(G)$ یکریخت و در نتیجه طبق قضیه بوخنر- شونبرگ- ابرلین، $L^1(G,w)$ یک جبر بی.اس.ایی است. ■

۲.۳.٦ گزاره

هر وزن w روی گروه فشرده G در رابطه $w(x) \geq 1$ برای هر $x \in G$، صدق می‌کند.

اثبات: مراجعه کنید به $[Kan09, Corollary\ 1.3.4]$. ■

۲.۳.۷ نتیجه

اگر G یک گروه موضعا فشرده باشد، آنگاه

$$L^1(G,|\tau^n|) \cong L^1(G)_{\tau(n)} \cong L^1(G)$$

که در رابطه فوق " $\cong$ " نشان دهنده یکریختی توپولوژیکی است.

اثبات: با توجه به گزاره‌های ۲.۳.۳ و ۲.۳.٦ حکم حاصل می‌گردد. ■

فصل سوم
سئوالات حل نشده و چند پیشنهاد برای تحقیقات بیشتر

۳ فصل سوم

۳.۱ سئوالات حل نشده

۳.۱.۱ سئوال یک

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و آبلی است و $w: G \to (0, \infty)$ یک وزن روی G است. آیا $L^1(G, w)$ یک جبر بی.اس.ایی است؟ یعنی آیا رابطه زیر برقرار می‌باشد

$$C_{\mathrm{BSE}}\left(\widehat{G}(w)\right) = \widehat{M(G, w)}. \blacksquare$$

۳.۱.۲ سئوال دو

آیا قضیه ۱.۱.۲۲، را می‌توانیم برای جبرهای فیگا- تالامانکا- هرتس $A_p(G)$ که $1 < p < \infty$، نیز تعمیم دهیم؟ قضیه ۱.۱.۲٤ را چطور؟ ■

۳.۱.۳ سئوال سه

آیا در قضیه ۱.۱.۲٤ می‌توانیم میانگین‌پذیری گروه G را به عنوان یک شرط کافی نیز برای برقرار بودن هر یک از بندها در نظر گرفت؟ یعنی آیا گزاره زیر برقرار می‌شود:

اگر I یک ایده‌ال بسته از $A(G)$ باشد، آنگاه G میانگین پذیر است اگر و تنها اگر I یک جبر بی.اس.ایی است.

اگر سئوال فوق اثبات شود تعمیم قابل توجهی از قضیه ۱.۱.۲۲ بدست می‌آید. ■

۳.۲ چند پیشنهاد برای کارهای تحقیقاتی

۳.۲.۱ پیشنهاد یک

می‌دانیم که برای یک جبر باناخ بدون مرتبه A، $C_{BSE}\big(\Delta(A)\big)$ با توجه به قضیه ۱.۱.۱۰، یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده است. در نتیجه فضای کارکتری این جبر ناتهی می‌باشد. توصیف فضای کارکتری این جبر کار پژوهشی بسیار جالب و ارزشمندی است.■

۳.۲.۲ پیشنهاد دو

برای گروه آبلی و موضعا فشرده G و تابع زیر ضربی و اندازه‌پذیر $\tau: G \to \mathbb{C}$، فرض کنیم $A = L^1(G)_{\tau(n)}$ که در ابتدای بخش ۲.۳، تعریف شد باشد. فضای کارکتری این جبر باناخ به طور کامل توصیف نشده و تحقیق در این زمینه منجر به یافته‌های ارزشمندی خواهد شد. همچنین می‌توانیم به بررسی کاراکتر میانگین‌پذیری جبر باناخ A نیز بپردازیم. ممکن است که توصیف زیر از کاراکتر میانگین‌پذیری جبر A برقرار باشد:

حدس: جبر باناخ A کاراکتر میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر گروه G میانگین‌پذیر باشد.■

۳.۲.۳ پیشنهاد سه

در مقاله $[LFxx]$ مولفین تعریف جدیدی از یک نوع میانگین‌پذیری را با عنوان φ–میانگین‌پذیر Δ–ضعیف، ارائه نموده‌اند. بعد از یافتن فضای کاراکتری جبر A در پیشنهاد ۰، می‌توانیم به بررسی اینکه چه وقت این جبر φ–میانگین‌پذیر Δ–ضعیف است بپردازیم.■

منابع

[Bur72]. **J. T. Burnham**, *Closed ideals in subalgebras of Banach algebras I*, Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972), 551–555.

[Dal00]. **H. G. Dales**, *Banach Algebras and Automatic Continuity*, Clarendon press, Oxford, 2000.

[DL05]. **H. G. Dales and A. T.-M. Lau**, *The second duals of Beurling algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 177 (2005), no. 836.

[DU15]. **H. G. Dales and A. Ülger**, *Approximate identities in Banach function algebras*, Studia Mathematica 226 (2015), no. 2, 155–187.

[Der11]. **A. Derighetti**, *Convolution Operators on Groups*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[FP06]. **E. Feizi and A. Pourabbas**, *On the hochschild cohomology of Beurling algebras*, Bull. Belg. Math. Soc. 13 (2006), 305–318.

[IT14]. **J. Inoue and S.-E. Takahasi**, *Segal algebras in commutative Banach algebras*, Rocky Mountain J. Math. 44 (2014), no. 2, 539–589.

[JL77]. **C. A. Jones and C. D. Lahr**, *Weak and norm approximate identities are different*, Pacific J. Math 72 (1977), no. 1, 99–104.

[KL13]. **Z. Kamali and M. L. Bami**, *Bochner-Schoenberg-Eberlein property for Segal algebras*, Proc. Japan Acad. Ser. A 89 (2013), 107-110.

[Kan09]. **E. Kaniuth**, *A Course in Commutative Banach Algebras*, Springer Verlag, Graduate texts in mathematics, 2009.

[KU10]. **E. Kaniuth and A. Ülger**, *The Bochner-Schoenberg-Eberlein property for commutative Banach algebras, especially Fourier and Fourier Stieltjes algebras*, Trans . Amer. Math. Soc. 362 (2010), 4331-4356.

[LFxx]. **J. Laali and M. Fozouni**, *On Δ-weak φ-amenability of Banach algebras,* U. P. B. Sci. Bull. Series A. To appear.

[Lar69]. **R. Larsen**, *The Multiplier Problem,* lecture Notes in Math., vol. 105, Springer Verlag, New York, 1969.

[Lar73]. **R. Larsen**, *Functional Analysis: an Introduction,* Marcel Dekker, New York, 1973.

[Rud62]. **W. Rudin**, *Fourier Analysis on Groups,* Interscience, New York, 1962.

[TH90]. **S. E. Takahasi and O. Hatori**, *Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein-type theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 149-158.

Abstract

In this research plan, first we give the elementary definitions and preliminaries of the BSE-algebras which introduced and studied in 1990 by Takahashi and Hatori. Then we try to characterize when $A_{\tau(n)}$ is a BSE algebra for which $A_{\tau(n)}$ was introduced and studied by Inoue and Takahashi in 2014. In the sequel, we give a new class of Banach algebra which is a subset of the group algebra $L^1(G)$ and try to investigate when this Banach algebra is a BSE-algebra.

Keywords: Banach algebra, Locally compact group, BSE-algebra, Character Space.

Ministry of Science, Research and Technology

Gonbad Kavous University

Faculty of Science and Engineering

Department of Statistics and Mathematics

Vice-president for Research and Technology
Management of Research and Technology

Final Report of Research Plan

BSE-Property of some Banach Algebras

By:
Mohammad Fozouni

April 2016